

10. Vollständige Lösungen

Aufgabe 1

- a) $f' = 3x^2 - 12x + 9$; $f'' = 6x - 12$; $f''' = 6$.
b) $f' = 8x^3 - 16x$; $f'' = 24x^2 - 16$; $f''' = 48x$.
c) $f' = -2x^3 + 6x^2 + 6$; $f'' = -6x^2 + 12x$; $f''' = -12x + 12$.

Aufgabe 2

$f' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$. Kandidaten $x=1, 3$. $f'' = 6x - 12$. $f''(1) = -6 \Rightarrow H$; $f''(3) = 6 \Rightarrow T$.
 $f(1) = 5$, $f(3) = 1$. $H(1|5)$, $T(3|1)$.

Aufgabe 3

$f' = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2)$. $x = -2, 0, 2$. $f'' = 12x^2 - 16$. Bei ± 2 : $f'' = 32 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkte; bei 0: $f'' = -16 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt. $f(\pm 2) = -9$, $f(0) = 7$. $T_1(-2|-9)$, $H(0|7)$, $T_2(2|-9)$.

Aufgabe 4

$f' = -6x^2 + 12x + 18 = -6(x-3)(x+1)$. $x = -1, 3$. $f'' = -12x + 12$. $f''(-1) = 24 > 0 \Rightarrow T$; $f''(3) = -24 < 0 \Rightarrow H$. $f(-1) = -15$, $f(3) = 49$. $T(-1|-15)$, $H(3|49)$.

Aufgabe 5

$f' = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. $x = 1, 3$. $f'' = 2x - 4$. $f''(1) < 0 \Rightarrow H$, $f''(3) > 0 \Rightarrow T$. $f(1) = 4/3$, $f(3) = 0$.
 $H(1|4/3)$, $T(3|0)$.

Aufgabe 6

$f' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$. Stationär: $x=0, 3$. $f'' = 12x^2 - 24x$. Bei $x=3$: $f'' = 36 > 0 \Rightarrow T$, $f(3) = -27$.
Bei $x=0$ ist $f''=0$; f' bleibt dort negativ auf beiden Seiten $\Rightarrow$ kein Extrempunkt. $x=0$ ist stationäre Wendestelle.

Aufgabe 7

$f' = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$. $x = -1, 0, 1$. $f'' = 12x^2 - 4$. T bei ± 1 , H bei 0. $f(\pm 1) = -1$, $f(0) = 0$.
 $T_1(-1|-1)$, $H(0|0)$, $T_2(1|-1)$.

Aufgabe 8

$f' = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$. $x = -2, 0, 2$. $f'' = 3x^2 - 4$. T bei ± 2 , H bei 0. $f(\pm 2) = 0$, $f(0) = 4$.

Aufgabe 9

$f'' = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$. $f''' = 6 \neq 0$. $f(1) = 0$. $W(1|0)$.

Aufgabe 10

$f' = 4x^3 - 12x^2$; $f'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$. Wendestellen $x = 0, 2$. $f''' = 24x - 24$ ist bei 0 und 2 ungleich 0. $W_1(0|2)$, $W_2(2|-14)$.

Aufgabe 11

$f'' = 24x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 2/3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2/3}$. $f''' = 48x \neq 0$ an beiden Stellen. Einsetzen in f liefert jeweils $-5/3$. Wendepunkte: $(\pm\sqrt{2/3}|-5/3)$.

Aufgabe 12

$f'' = 12x^2$. Zwar $f''(0) = 0$, aber f'' ist links und rechts positiv; kein Vorzeichenwechsel. Außerdem $f'''(0) = 0$. Daher kein Wendepunkt.

Aufgabe 13

$f' = 3x^2$, $f'' = 6x$, $f''' = 6$. Bei $x = 0$: $f' = 0$, $f'' = 0$, $f''' \neq 0 \Rightarrow$ stationärer Wendepunkt $S(0|-3)$.

Aufgabe 14

$f' = 4x^2(x-3)$. Stationär bei 0 und 3. $f'' = 12x(x-2)$. $x = 0$ ist zugleich Kandidat für Wendestelle; $f'''(0) = -24 \neq 0 \Rightarrow S(0|0)$.

Aufgabe 15

Beim Tiefpunkt wechselt f' typischerweise von $-$ nach $+$; bei hinreichender Prüfung gilt $f'' > 0$. Beim stationären Wendepunkt ist $f' = 0$, aber kein Extremum; die Krümmung wechselt, also f'' wechselt das Vorzeichen.

Lösungen – Gemischte Aufgaben 16–21

Aufgabe 16

$H(-1|10)$, $T(3|-22)$; $W(1|-6)$.

Aufgabe 17

$T_1(-\sqrt{2}|-4)$, $H(0|0)$, $T_2(\sqrt{2}|-4)$; Wendestellen $x = \pm\sqrt{2/3}$, $y = -20/9$.

Aufgabe 18 $T_1(-2|-1)$, $H(0|3)$, $T_2(2|-1)$; Wendestellen $x=\pm 2/\sqrt{3}$, $y=1/3$.

Aufgabe 19 $f'=3(x-2)^2$: $x=2$ ist kein Extremum. $f''=6(x-2)$, daher $W/S(2|4)$.

Aufgabe 20

$f'=-4x^3+12x^2=-4x^2(x-3)$: $T(3|25)$; $x=0$ stationäre Wendestelle $S(0|-2)$. Weitere Wendestelle $x=2$ mit $W(2|14)$.

Aufgabe 21

$f'=6x^2-12=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$. $f''=12x$: H bei $-\sqrt{2}$, T bei $\sqrt{2}$. W bei $x=0$ mit $W(0|1)$.

Hinweise zu den Anwendungsaufgaben 22–24

Bei Sachaufgaben müssen mathematische Ergebnisse immer mit Einheit und Bedeutung im Kontext formuliert werden. Prüfe außerdem, ob die gefundene Stelle im sachlich sinnvollen Definitionsbereich liegt.

Klausurtraining – Erwartungshorizont

Aufgabe	Erwartete Leistung	Punkte
1	$f'=3x^2-6x-9$; $f''=6x-6$; $f'''=6$	4
2	$x=-1$ und 3 ; Klassifikation; $H(-1 10)$, $T(3 -22)$	8
3	$f''=0 \Rightarrow x=1$; $f'''(1)=6 \neq 0$; $f(1)=-6 \Rightarrow W(1 -6)$	6
4	$f'=0$ liefert nur einen stationären Kandidaten; zusätzliche Prüfung erforderlich.	3
5	$g'(0)=0$, $g''(0)=0$; g' wechselt $-$ nach $+$ $\Rightarrow$ Tiefpunkt $(0 0)$; kein Krümmungswechsel $\Rightarrow$ kein Wendepunkt.	4

Abschluss-Check: Kann ich f' , f'' und f''' sicher bilden? Kann ich $f'=0$ lösen? Kann ich Hoch- und Tiefpunkte begründen? Kann ich Wendepunkte nachweisen? Gebe ich immer vollständige Punktkoordinaten an?