Kräfteaddition und -zerlegung

Grundwissen

Kräfte an der schiefen Ebene (rechnerisch)

Das Wichtigste auf einen Blick

- Überlegungen am rechtwinkligen Dreieck ermöglichen eine rechnerische Addition bzw. Zerlegung von Kräften - insbesondere auch an der schiefen Ebene.
- Für den Betrag $F_{\rm{G},\parallel}$ der parallel zur Ebene wirkende Hangabtriebskraft gilt $F_{\rm{G},\parallel} = F_{\rm{G}} \cdot \frac{h}{l} = F_{\rm{G}} \cdot \sin(\alpha)$.
- Für den Betrag $F_{\rm{G},\perp}$ der senkrecht zur Ebene wirkende Normalkomponente der Gewichtskraft gilt $F_{\rm{G},\perp} = F_{\rm{G}} \cdot \frac{b}{l} = F_{\rm{G}} \cdot \cos(\alpha)$.

Aufgaben ›

Berechnung der Hangabtriebskraft

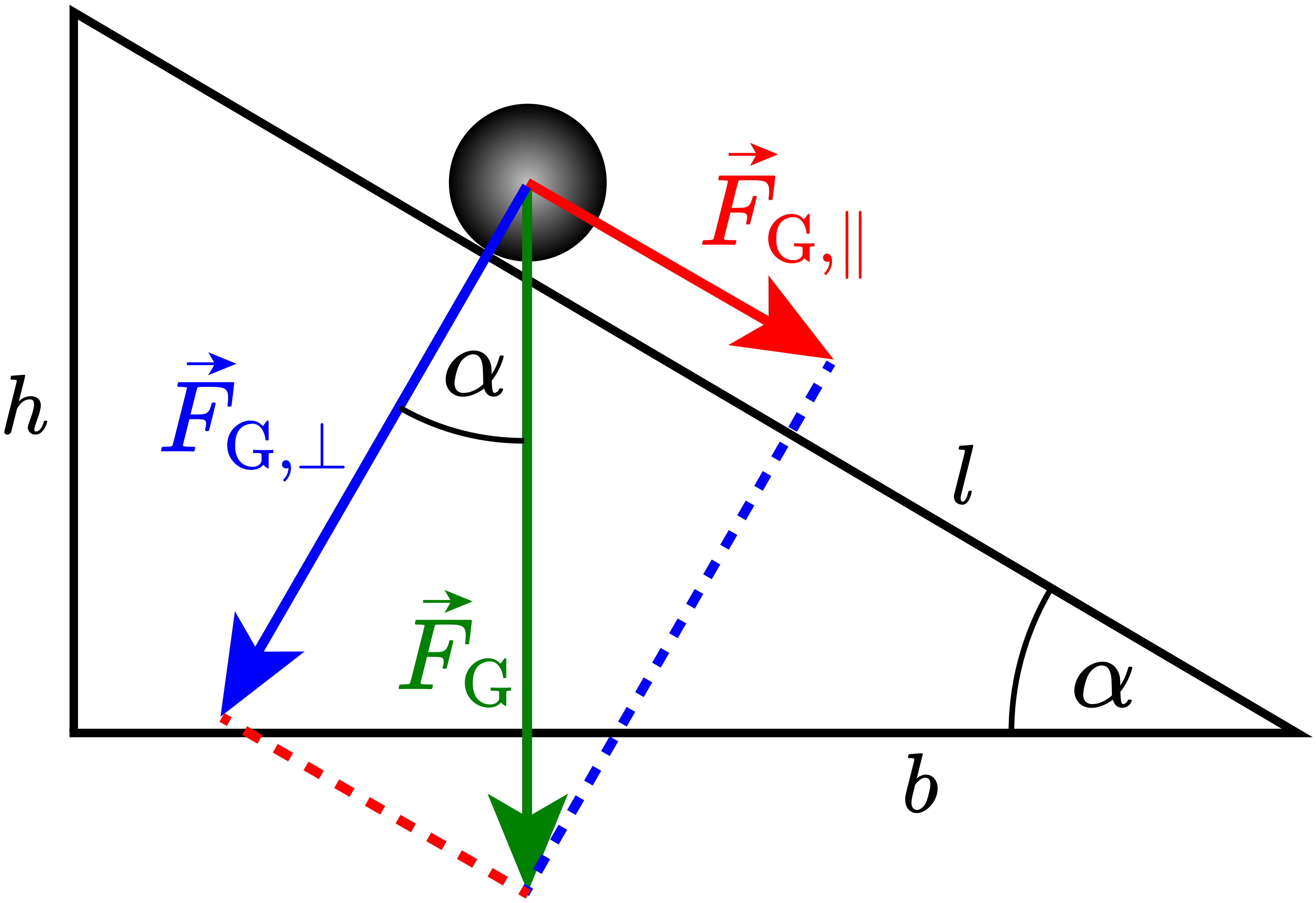

Abb. 1 Situation an der schiefen Ebene (Kräftezerlegung)

Für die Größe der Hangabtriebskraft $\vec{F}_{\mathrm{G},\parallel}$ (oft auch mit $\vec{F}_{\mathrm{H}}$ bezeichnet) an einer um den Winkel α gegenüber der Horizontalen geneigten Ebene gilt:

$$F_{\mathrm{G},\parallel} = F_{\mathrm{G}} \cdot \frac{h}{l} \quad \text{bzw.} \quad F_{\mathrm{G},\parallel} = F_{\mathrm{G}} \cdot \sin(\alpha)$$

Für den Betrag der Normalenkomponente der Gewichtskraft $\vec{F}_{\mathrm{G},\perp}$ bzw. der Normalkraft der Ebene $\vec{F}_{\mathrm{N}}$ gilt

$$F_{\mathrm{G},\perp} = F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G}} \cdot \frac{b}{l} \quad \text{bzw.} \quad F_{\mathrm{G},\perp} = F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G}} \cdot \cos(\alpha)$$

Hinweis: $\vec{F}_{\mathrm{G},\perp}$ und $\vec{F}_{\mathrm{N}}$ zeigen gerade in entgegengesetzte Richtungen: $\vec{F}_{\mathrm{G},\perp}$ zeigt senkrecht in die schiefe Ebene hinein, $\vec{F}_{\mathrm{N}}$ steht senkrecht auf der schiefen Ebene.

Aufgabe

Ein Bierfass (Betrag der Gewichtskraft $F_{\mathrm{G}} = 300\,\mathrm{N}$) rollt von einer $1{,}0\,\mathrm{m}$ hohen Ladefläche über eine $5{,}0\,\mathrm{m}$ lange Rampe hinunter auf den Boden.

Berechne den Betrag der Hangabtriebskraft, die dabei auf das Fass wirkt.

Lösungsvorschläge

- [ ] $25\,\mathrm{N}$
- [ ] $30\,\mathrm{N}$
- [ ] $50\,\mathrm{N}$
- [ ] $60\,\mathrm{N}$ ✔ Richtige Antwort

Lösung

Allgemein gilt für den Betrag der Hangabtriebskraft an schiefen Ebene $F_{\mathrm{G},\parallel} = F_{\mathrm{G}} \cdot \frac{h}{l}$. Einsetzen der gegebenen Werte führt zu

$$F_{G,\parallel} = 300\,\mathrm{N} \cdot \frac{1{,}0\,\mathrm{m}}{5{,}0\,\mathrm{m}} = 60\,\mathrm{N}$$

Zwei Wege der Betrachtung

Das Problem der schiefen Ebene kannst du auf zwei unterschiedliche Arten analysieren: mit Hilfe der Kräftezerlegung oder mit Hilfe der Kräfteaddition. Im Folgenden sind beide Möglichkeiten getrennt dargestellt.

Betrachtung mittels Kräftezerlegung

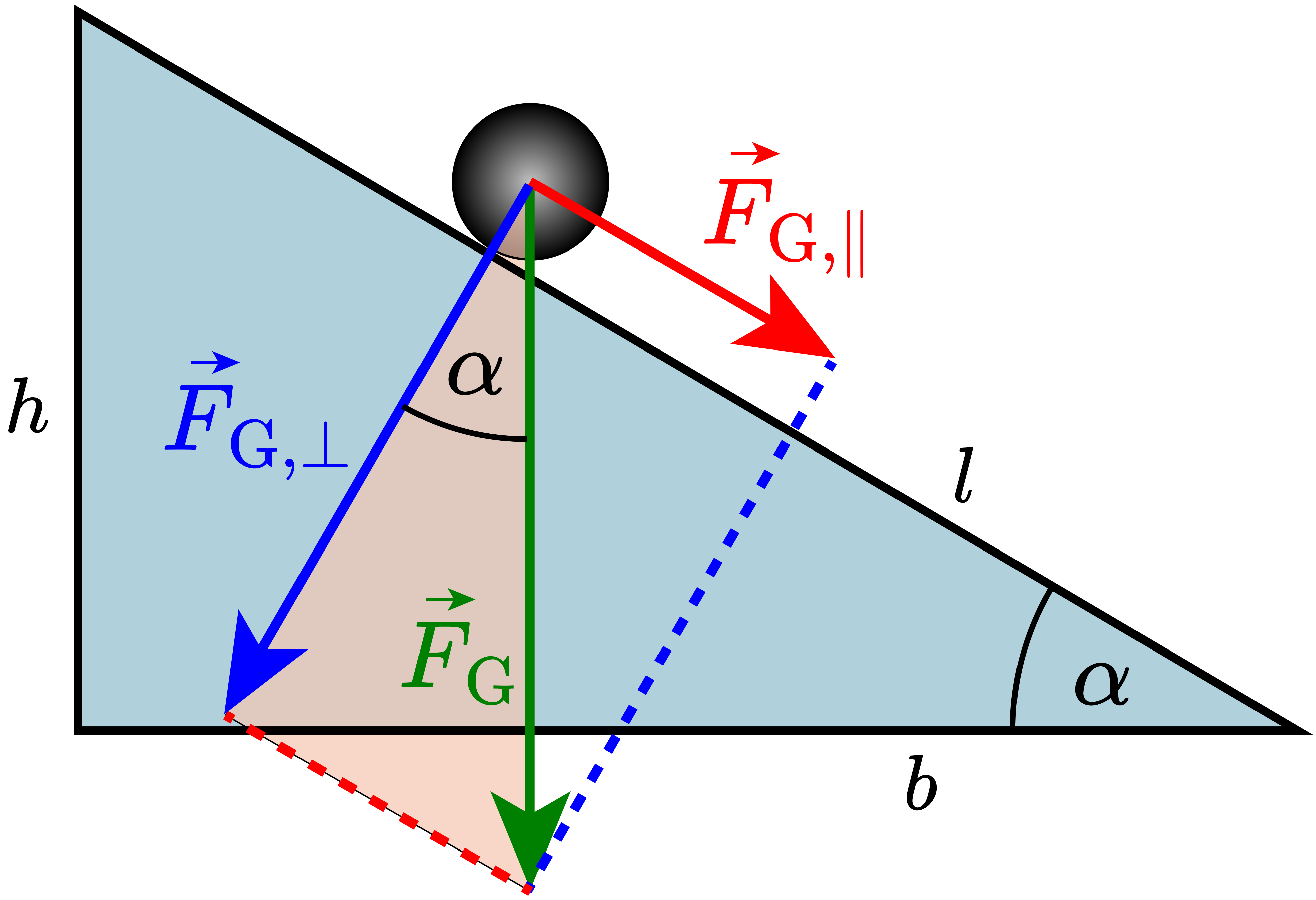

Abb. 2 Zerlegung der Gewichtskraft an der schiefen Ebene

Um die Kräfte auf einen Körper auf einer schiefen Ebene rechnerisch zu bestimmen, hilft eine geometrische Betrachtung der Situation.

Die schiefe Ebene kannst du als rechtwinkliges Dreieck auffassen (blau in **Abb. 2**). Dabei ist die Länge der schiefen Ebene l die Hypotenuse. Bezogen auf den Neigungswinkel der Ebene mit der Winkelweite α ist weiter die Höhe h die Gegenkathete und die Breite b die Ankathete.

Nun zerlegst du die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ in eine Komponente parallel zur Ebene, die sog. Hangabtriebskraft $\vec{F}_{G,\parallel}$ und eine Komponente senkrecht zur Ebene, die sog. Normalkomponente der Gewichtskraft $\vec{F}_{G,\perp}$. Durch die Parallelverschiebung einer der beiden Kräfte ergibt sich ebenfalls ein rechtwinkliges Dreieck (rot in **Abb. 2**). Dieses rechtwinklige Kräftedreieck ist ähnlich zum rechtwinkligen Dreieck der schiefen Ebene. Hier ist die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ die Hypotenuse. Bezogen auf den Winkel mit der Weite α ist die Hangabtriebskraft $\vec{F}_{G,\parallel}$ die Gegenkathete und die Normalkomponente der Gewichtskraft $\vec{F}_{G,\perp}$ die Ankathete.

Betrachtung mittels Kräfteaddition

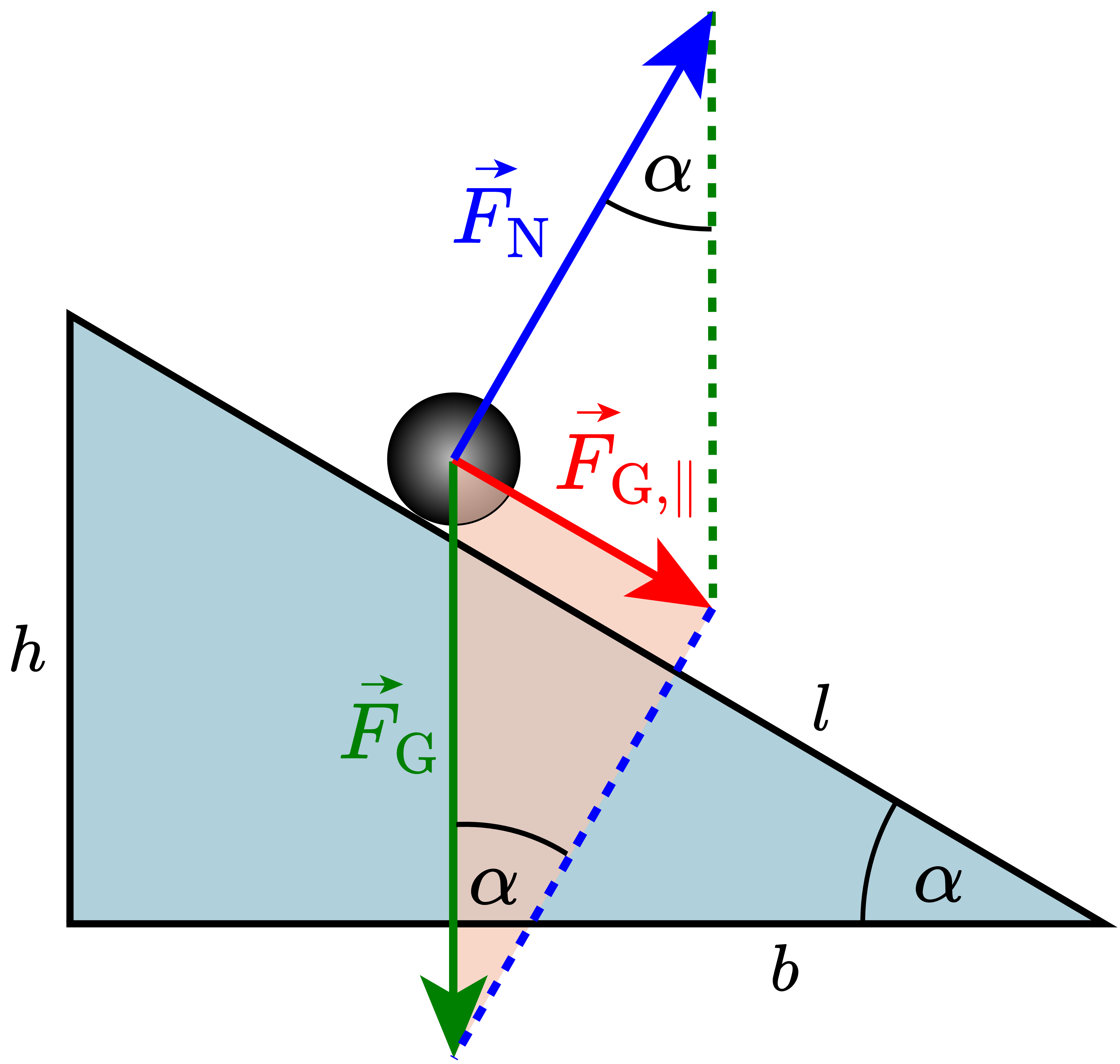

Abb. 3 Addition von Gewichtskraft und Normalkraft an der schiefen Ebene

Um das Problem mittles Kräfteaddition zu analysieren, musst du alle auf den Gegenstand einwirkenden Kräfte betrachten und diese addieren. Auf einen Gegenstand auf der schiefen Ebene wirkt zum einen die Gewichtskraft $\vec{F}_{\mathrm{G}}$. Darüber hinaus wirkt auf den Gegenstand jedoch auch die senkrecht zur Ebene stehende Normalkraft $\vec{F}_{\mathrm{N}}$, die praktisch dafür sorgt, dass der Gegenstand nicht einfach "durch die Ebene hindurch fällt".

Zur Bestimmung der resultierenden Kraft musst du die Gewichtskraft $\vec{F}_{\mathrm{G}}$ und die Normalkraft der Ebene $\vec{F}_{\mathrm{N}}$ mittels Kräftedreieck bzw. Kräfteparallelogramm addieren. Es ergibt sich dabei wiederum ein rechtwinkliges Dreieck (siehe **Abb. 3**), wobei die resultierende Kraft die sog. Hangabtriebskraft $\vec{F}_{\mathrm{G},\parallel}$ ist, die parallel zur schiefen Ebene verläuft. Dieses Kräftedreieck ist rechtwinklig und ähnlich mit dem Dreieck der Ebene.

Berechnung der Kräfte über Längenverhältnisse

Da jeweils das Dreiecke der Ebene und das Dreieck der Kräfte ähnlich sind, ist das Verhältnis von den entsprechenden Seitenlängen beider Dreiecke zueinander gleich. Da bei physikalischen Problemen häufig die Gewichtskraft des Körpers auf der schiefen Ebene bekannt ist, berechnest du die Größe der Hangabtriebskraft mit

$$\frac{F_{\mathrm{G},\parallel}}{F_{\mathrm{G}}} = \frac{h}{l} \Leftrightarrow F_{\mathrm{G},\parallel} = F_{\mathrm{G}} \cdot \frac{h}{l} \quad (1)$$

Die Größe der Normalkomponente der Gewichtskraft (siehe Kräftezerlegung) ist entsprechend

$$\frac{F_{\mathrm{G},\perp}}{F_{\mathrm{G}}} = \frac{b}{l} \Leftrightarrow F_{\mathrm{G},\perp} = F_{\mathrm{G}} \cdot \frac{b}{l} \quad (2)$$

Die Größe der Normalkraft (siehe Kräfteaddition) ist entsprechend

$$\frac{F_{\mathrm{N}}}{F_{\mathrm{G}}} = \frac{b}{l} \Leftrightarrow F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G}} \cdot \frac{b}{l} \quad (3)$$

Die Normalkomponente der Gewichtskraft $F_{\mathrm{G},\perp}$ und die Normalkraft F_{N} sind also gleich groß, aber genau entgegengesetzt gerichtet.

Natürlich kannst du aus den Gleichungen (1), (2) und (3) auch die Gewichtskraft des Körpers ausrechnen, wenn die Hangabtriebskraft oder die Normalkomponente der Gewichtskraft bekannt ist. Dazu musst du die Gleichung nach der Gewichtskraft F_{G} auflösen.

Berechnung mit Sinus und Kosinus

Wenn die entsprechenden Maße der Ebene nicht bekannt sind, sondern lediglich die Weite α des Neigungswinkels der schiefen Ebene gegeben ist, benötigst du die trignometrischen Funktionen Sinus und Kosinus, um die Beträge der Kräfte an der schiefen Ebene rechnerisch zu bestimmen. Im rechtwinkligen Kräftedreieck gilt für die Beträge der Kräfte

$$\text{Hangabtriebskraft: } F_{\mathrm{G},\parallel} = F_{\mathrm{G}} \cdot \sin(\alpha)$$

$$\text{Normalkomponente der Gewichtskraft: } F_{\mathrm{G},\perp} = F_{\mathrm{G}} \cdot \cos(\alpha)$$

Hinweis: Achte bei konkreten Rechnungen darauf, dass dein Taschenrechner auf "Degree" oder "DEG" steht. Zum Testen gib einfach $\sin(30^\circ)$ ein. Bei richtiger Einstellung ist $\sin(30^\circ) = 0{,}5$.

Aufgabe

Julia will ihren Schlitten (Betrag der Gewichtskraft $F_{\mathrm{G}} = 50\,\mathrm{N}$) einen schneebedeckten Hang nach oben ziehen, den man als schiefe Ebene mit einem Neigungswinkel der Weite $\alpha = 30^\circ$ ansehen kann.

Berechne den Betrag der Hangabtriebskraft, die Julia beim Ziehen überwinden muss, und den Betrag der Normalkomponente der Gewichtskraft.

Lösung

Für den Betrag der Hangabtriebskraft an der schiefen Ebene gilt $F_{\mathrm{G},\parallel} = F_{\mathrm{G}} \cdot \sin(\alpha)$, also ist hier $F_{\mathrm{G},\parallel} = 50\,\mathrm{N} \cdot \sin(30^\circ) = 25\,\mathrm{N}$.

Für den Betrag der Normalkomponente der Gewichtskraft gilt $F_{\mathrm{G},\perp} = F_{\mathrm{G}} \cdot \cos(\alpha)$, also ist hier $F_{\mathrm{G},\parallel} = 50\,\mathrm{N} \cdot \cos(30^\circ) = 43\,\mathrm{N}$.