

Lösungen und Erwartungshorizont – Q-Phase

Mathematik | Funktionsuntersuchung · Ganzrationale Funktionen

Zur Klausur „Mathematik – Klausur Q-Phase“ | 60 Minuten | 40 Punkte

Hinweis zur Bewertung: Gleichwertige korrekte Lösungswege sind anzuerkennen.
Folgefehler werden nicht mehrfach bestraft, soweit der weitere Lösungsweg fachlich richtig ist.

Aufgabe 1 – Untersuchung einer Funktion (30 Punkte)

Gegeben: $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

a) Ableitungen (3 P.)

$$f'(x) = 3x^2 - 3; f''(x) = 6x; f'''(x) = 6.$$

Punkte: je 1 P. für jede richtige Ableitung.

b) Nullstellen und Vielfachheiten (6 P.)

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2).$$

Damit gilt $f(x) = 0$ genau für $x = 1$ (doppelte Nullstelle) und $x = -2$ (einfache Nullstelle).

Punkte: geeigneter Ansatz bzw. Auffinden einer Nullstelle 1 P.; korrekte Faktorisierung 2 P.; beide Nullstellen 2 P.; richtige Vielfachheiten 1 P.

c) Extrempunkte (8 P.)

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ oder } x = 1.$$

$$f'(-1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}; f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4 \Rightarrow H(-1 \mid 4).$$

$$f'(1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}; f(1) = 1 - 3 + 2 = 0 \Rightarrow T(1 \mid 0).$$

Punkte: $f' = 0$ ansetzen 1 P.; beide kritischen Stellen 2 P.; f' -Test an beiden Stellen 2 P.; beide y-Werte 2 P.; korrekte Punktabgaben und Klassifikation 1 P.

d) Wendepunkt (5 P.)

$$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0. f'''(0) = 6 \neq 0 \text{ (hinreichende Bedingung erfüllt).}$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow W(0 \mid 2).$$

Punkte: $f' = 0$ 1 P.; $x = 0$ 1 P.; $f'''(0) \neq 0$ und Deutung 2 P.; $W(0 \mid 2)$ 1 P.

e) Tangente und Normale im Wendepunkt (6 P.)

$$\text{Tangentensteigung: } m_t = f'(0) = -3. \text{ Tangente durch } W(0 \mid 2): t(x) = -3x + 2.$$

$$\text{Normalensteigung: } m_n = -1/m_t = 1/3. \text{ Normale durch } W(0 \mid 2): n(x) = (1/3)x + 2.$$

Punkte: Tangentensteigung 1 P.; Tangentengleichung 2 P.; Normalensteigung 1 P.; Normalengleichung 2 P.

f) Monotonie (2 P.)

$$f'(x) = 3(x - 1)(x + 1) \text{ ist positiv für } x < -1 \text{ und } x > 1; \text{ negativ für } -1 < x < 1.$$

Streng steigend: $(-\infty, -1)$ und $(1, \infty)$. Streng fallend: $(-1, 1)$.

Punkte: steigende Intervalle 1 P.; fallendes Intervall 1 P.

Aufgabe 2 – Veränderung durch einen Parameter (10 Punkte)

Für $a > 1$ gilt $g_a(x) = a(x^3 - 3x + 2)$.

a) Wendepunkt (4 P.)

$$g_a'(x) = a(3x^2 - 3); g_a''(x) = 6ax; g_a'''(x) = 6a.$$

Wegen $a > 1$ gilt $g_a''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $g_a'''(0) = 6a \neq 0$. $g_a(0) = 2a \Rightarrow W_a(0 \mid 2a)$.

Punkte: $g_a''(x)$ 1 P.; $x = 0$ 1 P.; Nachweis des Wendepunkts 1 P.; Koordinaten 1 P.

b) Wendetangente (4 P.)

Steigung $m_a = g_a'(0) = -3a$. Durch $W_a(0 \mid 2a)$ ergibt sich $t_a(x) = -3ax + 2a$.

Punkte: $g_a'(x)$ 1 P.; Steigung $-3a$ 1 P.; Punkt-Steigungs-Ansatz 1 P.; richtige Gleichung 1 P.

c) Deutung (2 P.)

Mit wachsendem a steigt die y-Koordinate des Wendepunkts $2a$ linear; die x-Koordinate bleibt 0. Die Tangentensteigung $-3a$ wird negativer: Die Wendetangente fällt zunehmend steil.

Punkte: Veränderung des Wendepunkts 1 P.; Veränderung der Steigung 1 P.

Punkteübersicht

Teilaufgabe	Maximalpunkte	Erreichte Punkte
1a	3	
1b	6	
1c	8	
1d	5	
1e	6	
1f	2	
2a	4	
2b	4	
2c	2	
Gesamt	40	

Notenschlüssel: nach den an der Schule geltenden Vorgaben; keine pauschale Notenzuordnung vorgenommen.