

Musterlösungen und Erwartungshorizont

Mathematik · Klausur · Jahrgang 11 (Q-Phase) · 90 Minuten · 60 Punkte

Korrekturhinweis: Gleichwertige richtige Lösungswege sind anzuerkennen. Folgefehler bei ansonsten korrektem Vorgehen angemessen berücksichtigen. Die angegebenen Einzelpunkte bilden jeweils die Höchstpunktzahl.

Aufgabe 1 – Kurvendiskussion (30 P.)

Gegeben: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = (x - 3)^2(x + 3)$.

a) Achsenschnittpunkte (6 P.): $f(x)=0 \Rightarrow (x-3)^2(x+3)=0$. Nullstellen $x=-3$ (einfach) und $x=3$ (doppelt). Schnittpunkte $N_1(-3 \mid 0)$, $N_2(3 \mid 0)$. y-Achse: $f(0)=27$, also $S_y(0 \mid 27)$.

Teilleistung	Punkte
Richtige Faktorisierung oder gleichwertige Nullstellenbestimmung	2
Beide Nullstellen einschließlich Vielfachheiten	2
Schnittpunkte mit x- und y-Achse korrekt angegeben	2

b) Ableitungen (4 P.): $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$; $f''(x)=6x-6$.

Teilleistung	Punkte
Erste Ableitung korrekt	2
Zweite Ableitung korrekt	2

c) Extrempunkte (8 P.): $f'(x)=0 \Rightarrow 3(x+1)(x-3)=0 \Rightarrow x=-1$ oder $x=3$. $f'(-1)=-12 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt; $f(-1)=32 \Rightarrow H(-1 \mid 32)$. $f'(3)=12 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt; $f(3)=0 \Rightarrow T(3 \mid 0)$.

Teilleistung	Punkte
Stationäre Stellen $x=-1$ und $x=3$	2
f' an beiden Stellen berechnet	2
Hoch-/Tiefpunkt mit korrekter Begründung	2
Beide y-Werte und Punktkoordinaten	2

d) Wendepunkt (6 P.): $f''(x)=0 \Rightarrow 6x-6=0 \Rightarrow x=1$. $f(1)=1-3-9+27=16$. $f'''(x)=6 \neq 0$, daher tatsächlicher Wendepunkt $W(1 \mid 16)$. Alternativ: Vorzeichenwechsel von f' bei $x=1$.

Teilleistung	Punkte
$f''(x)=0$ angesetzt und $x=1$ bestimmt	2
Funktionswert $f(1)=16$	2
Wendepunktprüfung mit $f''' \neq 0$ oder Vorzeichenwechsel und Koordinate	2

e) Monotonie und Skizze (6 P.): $f(x) > 0$ für $x < -1$ und $x > 3$; $f(x) < 0$ für $-1 < x < 3$. Also streng steigend auf $(-\infty, -1)$, streng fallend auf $(-1, 3)$, streng steigend auf $(3, \infty)$. Skizze mit $N_1(-3 | 0)$, $N_2/T(3 | 0)$, $S_y(0 | 27)$, $H(-1 | 32)$, $W(1 | 16)$, passendem Verlauf und tangentialer Berührung bei $x=3$.

Teilleistung	Punkte
Monotonieintervalle und Richtungen vollständig korrekt	3
Skizze: wesentliche Punkte, Achsen und Kurvenverlauf korrekt	3

Aufgabe 2 - Ganzrationale Funktion bestimmen (12 P.)

Ansatz: $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

a) Vier Bedingungen: $g(0)=0 \Rightarrow d=0$; $g(1)=0 \Rightarrow a+b+c+d=0$; $g(3)=0 \Rightarrow 27a+9b+3c+d=0$; $g'(0)=3 \Rightarrow c=3$.

Teilleistung	Punkte
Vier zutreffende Gleichungen, jeweils 1 P.	4

b) Mit $d=0$ und $c=3$ gilt $a+b=-3$ sowie $27a+9b=-9$ bzw. $3a+b=-1$. Subtraktion: $2a=2 \Rightarrow a=1$; $b=-4$. Ergebnis: $g(x) = x^3 - 4x^2 + 3x = x(x-1)(x-3)$.

Teilleistung	Punkte
$c=3$ und $d=0$ richtig übernommen	1
Zwei Gleichungen für a und b korrekt gebildet	2
$a=1$ und $b=-4$ korrekt berechnet	2
Endfunktion korrekt angegeben	1

c) Beispielkontrollen: $g(1)=1-4+3=0$ und $g'(0)=3$. Alternativ sind zwei beliebige andere der vier Ausgangsbedingungen zulässig.

Teilleistung	Punkte
Zwei unterschiedliche Bedingungen rechnerisch korrekt geprüft, je 1 P.	2

Aufgabe 3 - Extremwertproblem (10 P.)

a) Umfang: $2x+2y=20 \Rightarrow y=10-x$. Fläche: $A=x \cdot y = x(10-x) = 10x - x^2$. Sinnvoll: $0 < x < 10$ (m), da beide Seiten positiv sein müssen.

Teilleistung	Punkte
Umfangsgleichung und $y=10-x$	2
Flächenfunktion $A(x)=10x-x^2$	1
Definitionsbereich $0 < x < 10$	1

b) $A'(x) = 10 - 2x$. $A'(x) = 0 \Rightarrow x = 5$ m, somit $y = 5$ m. $A''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$ Maximum. Der Garten ist quadratisch.

Teilleistung	Punkte
A' und stationäre Stelle $x=5$ korrekt	2
$y=5$ und Maximum mit $A''<0$ begründet	2

c) $A(5)=5 \cdot (10-5)=25 \text{ m}^2$.

Teilleistung	Punkte
Maximalfläche 25 mit korrekter Einheit m^2	2

Aufgabe 4 – Ableitungsregeln (8 P.)

a) $h(x)=2x^4-3x^2+5x-7 \Rightarrow h'(x)=8x^3-6x+5$.

Teilleistung	Punkte
Ableitung $2x^4 \rightarrow 8x^3$	1
Ableitung $-3x^2 \rightarrow -6x$	1
Ableitung $5x \rightarrow 5$	1
Konstante $-7 \rightarrow 0$ und vollständiges Ergebnis	1

b) $k(x)=(x+2)(x^2-1)$. Produktregel: $(uv)'=u'v+uv'$. Mit $u=x+2$, $v=x^2-1$: $k'(x)=1 \cdot (x^2-1)+(x+2) \cdot 2x = 3x^2+4x-1$.

Teilleistung	Punkte
Produktregel korrekt benannt	1
Ableitungen $u'=1$ und $v'=2x$	1
Produktregel korrekt eingesetzt	1
Ergebnis $3x^2+4x-1$ richtig vereinfacht	1

Gesamtübersicht

Teilleistung	Punkte
Aufgabe 1: Kurvendiskussion	30
Aufgabe 2: Funktion bestimmen	12
Aufgabe 3: Extremwertproblem	10
Aufgabe 4: Ableitungsregeln	8
GESAMT	60

Bewertung: Eine Notenskala ist nicht vorgegeben; die Umrechnung der 60 Punkte erfolgt nach den an der Schule gültigen Regelungen.