

Musterlösungen und Erwartungshorizont

Mathematik – Klausur | Q-Phase (Jahrgang 11) | Analysis

Arbeitszeit: 90 Minuten · Gesamt: 60 Punkte

Bewertungshinweis: Gleichwertige richtige Lösungswege sind anzuerkennen. Folgefehler nur einmal berücksichtigen; Teilpunkte für nachvollziehbare Zwischenschritte vergeben.

Aufgabe 1 – Ganzrationale Funktion (30 P.)

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x - 3)^2$$

a) Nullstellen und Vielfachheiten (5 P.)

$$f(x) = x(x^2 - 6x + 9) = x(x - 3)^2.$$

Nullstellen: $x_1 = 0$ (einfach), $x_2 = 3$ (doppelt).

Punkte: Faktorisierung 2 P.; $x = 0$ 1 P.; $x = 3$ 1 P.; Vielfachheiten 1 P.

b) Ableitungen (4 P.)

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3).$$

$$f''(x) = 6x - 12.$$

Punkte: erste Ableitung 2 P.; zweite Ableitung 2 P.

c) Extrempunkte (7 P.)

$$f'(x) = 3(x - 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ oder } x = 3.$$

$$f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}; f(1) = 1 - 6 + 9 = 4 \Rightarrow H(1 \mid 4).$$

$$f''(3) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}; f(3) = 27 - 54 + 27 = 0 \Rightarrow T(3 \mid 0).$$

Punkte: stationäre Stellen 2 P.; zweite Ableitung / Klassifikation 2 P.; Funktionswerte 2 P.; korrekte Koordinaten 1 P.

d) Wendepunkt und Tangentensteigung (5 P.)

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2. \text{ Da } f'''(x) = 6 \neq 0, \text{ liegt ein Wendepunkt vor.}$$

$$f(2) = 8 - 24 + 18 = 2 \Rightarrow W(2 \mid 2).$$

$$f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3 \Rightarrow \text{Tangentensteigung } m = -3.$$

Punkte: x-Wert 2 P.; Nachweis 1 P.; y-Wert 1 P.; Steigung 1 P.

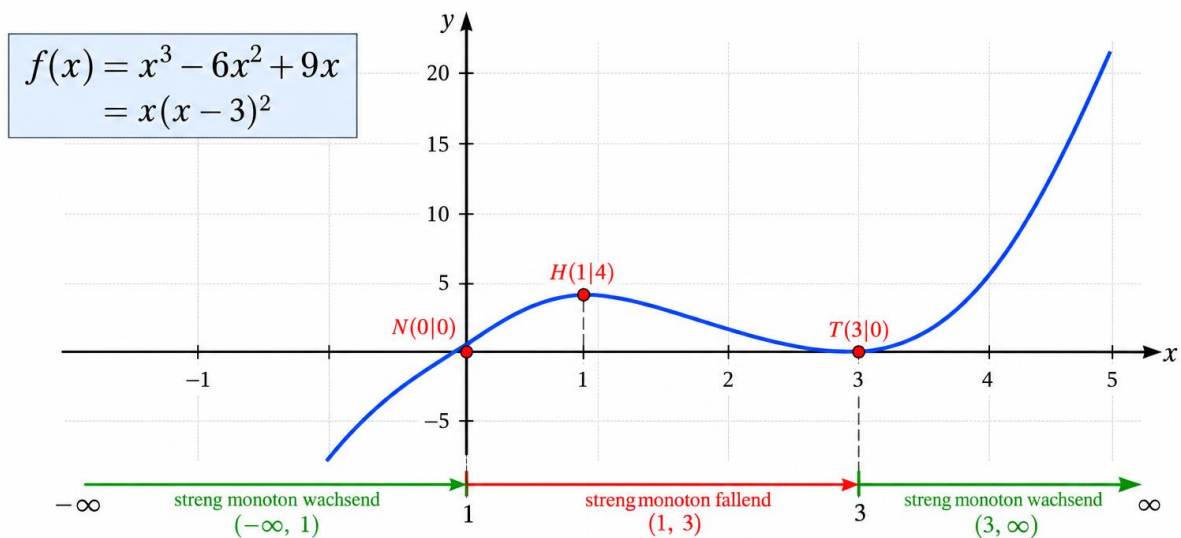
e) Monotonie und Skizze (6 P.)

$$f'(x) = 3(x - 1)(x - 3). \text{ Vorzeichen: positiv für } x < 1, \text{ negativ für } 1 < x < 3, \text{ positiv für } x > 3.$$

Streng wachsend: $(-\infty; 1)$ und $(3; \infty)$. Streng fallend: $(1; 3)$.

Skizze: Verlauf von links unten nach rechts oben; Durchgang durch $(0 \mid 0)$, Hochpunkt $H(1 \mid 4)$, Wendepunkt $W(2 \mid 2)$, Tiefpunkt $T(3 \mid 0)$ mit Berührung der x-Achse.

Punkte: drei Monotonieintervalle je 1 P. = 3 P.; korrekter qualitativer Verlauf 1 P.; Extrempunkte 1 P.; Nullstellen/Wendepunkt und Achsenbeschriftung 1 P.



Monotonie (Ergebnis):

Intervall	Verhalten von f
$(-\infty, 1)$	streng monoton wachsend
$(1, 3)$	streng monoton fallend
$(3, \infty)$	streng monoton wachsend

Wichtige Punkte für die Skizze:

Nullstellen: $x = 0$ und $x = 3$ (doppelte Nullstelle)

Hochpunkt: $H(1|4)$

Tiefpunkt: $T(3|0)$ (berührt die x -Achse)

Wendepunkt: $W(2|2)$

Verhalten: $f(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow -\infty$ und $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$

f) Tangente bei $x = 0$ (3 P.)

$$f(0) = 0; f'(0) = 9.$$

$$t(x) = f'(0)(x - 0) + f(0) = 9x.$$

Punkte: Punkt 1 P.; Steigung 1 P.; Tangentengleichung 1 P.

Aufgabe 2 – Nullstellen und Steigung (12 P.)

$$g(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

a) Nullstellen und y -Achsenabschnitt (4 P.)

Nullstellen: $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.

$g(0) = 3 \Rightarrow$ Schnittpunkt mit der y -Achse: $(0 | 3)$.

Punkte: Nullstellen je 1 P.; y -Wert 1 P.; Koordinaten 1 P.

b) Scheitelpunkt (4 P.)

$$g(x) = (x - 2)^2 - 1 \Rightarrow S(2 | -1).$$

Da der Koeffizient vor x^2 positiv ist (alternativ $g'' = 2 > 0$), handelt es sich um einen Tiefpunkt.

Punkte: quadratische Ergänzung oder x -Scheitel 2 P.; y -Wert 1 P.; Tiefpunktbeurteilung 1 P.

c) Ableitung und Monotonie (4 P.)

$$g'(x) = 2x - 4. \quad g'(x) < 0 \text{ für } x < 2; \quad g'(x) > 0 \text{ für } x > 2.$$

Fallend: $(-\infty; 2)$; steigend: $(2; \infty)$.

Punkte: Ableitung 2 P.; fallender Bereich 1 P.; steigender Bereich 1 P.

Aufgabe 3 – Rechteckoptimierung (10 P.)

a) Flächenfunktion und Definitionsbereich (3 P.)

$$2x + 2y = 20 \Rightarrow y = 10 - x.$$

$$A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2 \text{ (cm}^2\text{)}, \text{ mit } 0 < x < 10 \text{ (cm)}.$$

Punkte: Nebenbedingung 1 P.; Flächenfunktion 1 P.; Definitionsbereich 1 P.

b) Maximum und Seitenlängen (5 P.)

$$A'(x) = 10 - 2x = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ cm.}$$

$$A''(x) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Maximum.}$$

$$y = 10 - 5 = 5 \text{ cm. Das optimale Rechteck ist ein Quadrat.}$$

Punkte: Ableitung 1 P.; Gleichung $A' = 0$ 1 P.; $x = 5$ 1 P.; Maximumsnachweis 1 P.; zweite Seite 1 P.

c) Maximaler Flächeninhalt (2 P.)

$$A(5) = 5 \cdot 5 = 25 \text{ cm}^2.$$

Punkte: Rechnung 1 P.; Ergebnis mit Einheit 1 P.

Aufgabe 4 – Ableitungsregeln (8 P.)

a) Potenzregel (2 P.)

$$h(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5 \Rightarrow h'(x) = 12x^2 - 4x.$$

Punkte: $12x^2$ 1 P.; $-4x$ und Wegfall der Konstante 1 P.

b) Produktregel / Ausmultiplizieren (2 P.)

$$k(x) = (x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2 \Rightarrow k'(x) = 2x - 1.$$

$$\text{Alternativ: } k'(x) = (x - 2) + (x + 1) = 2x - 1.$$

Punkte: korrekte Regel/Umformung 1 P.; Ableitung 1 P.

c) Kettenregel (2 P.)

$$p(x) = (2x - 1)^2 \Rightarrow p'(x) = 2(2x - 1) \cdot 2 = 8x - 4.$$

Punkte: äußere Ableitung 1 P.; innere Ableitung und Ergebnis 1 P.

d) Steigung an $x = 4$ (2 P.)

$$q(x) = x^2 - 6x \Rightarrow q'(x) = 2x - 6.$$

$$q'(4) = 8 - 6 = 2.$$

Punkte: Ableitung 1 P.; Einsetzen und Ergebnis 1 P.

Punkteübersicht

Aufgabe	Maximalpunkte
1. Kurvendiskussion	30
2. Nullstellen und Steigung	12
3. Rechteckoptimierung	10
4. Ableitungsregeln	8
Gesamt	60