

ERWARTUNGSHORIZONT UND MUSTERLÖSUNGEN

Mathematik · E-Phase · Jahrgang 11 · Analysis

Zur Klausur: 90 Minuten · 60 Punkte. Gleichwertige mathematisch korrekte Lösungswege sind anzuerkennen. Punkte innerhalb der Teilaufgaben sind unabhängig zu vergeben.

Aufgabe 1 – Polynomfunktion (30 Punkte)

$$f(x) = 9x^4 - 86x^3 + 261x^2 - 300x + 100$$

a) Doppelte Nullstelle $x = 2$ (4 P.)

- $f(2) = 144 - 688 + 1044 - 600 + 100 = 0$ [1 P.]
- $f'(x) = 36x^3 - 258x^2 + 522x - 300$; $f'(2) = 0$ [1 P.]
- $f''(x) = 108x^2 - 516x + 522$; $f''(2) = -78 \neq 0$ [1 P.]
- Damit ist $x = 2$ eine Nullstelle genau zweiter Ordnung. [1 P.]

b) Weitere Nullstellen (5 P.)

- Abspalten von $(x - 2)^2$ durch Polynomdivision bzw. Koeffizientenvergleich. [2 P.]
- $f(x) = (x - 2)^2(9x^2 - 50x + 25) = (x - 2)^2(x - 5)(9x - 5)$. [2 P.]
- Weitere Nullstellen: $x = 5$ und $x = 5/9$. [1 P.]

c) Stationäre Stellen (6 P.)

- $f'(x) = 6(x - 2)(x - 1)(6x - 25)$. [2 P.]
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 2, x = 25/6$. [2 P.]
- Funktionswerte: $f(1) = -16$; $f(2) = 0$; $f(25/6) = -54925/432 \approx -127,1412$. [2 P.]

d) Klassifizierung (4 P.)

- $f''(x) = 108x^2 - 516x + 522$. [1 P.]
- $f''(1) = 114 > 0$: Tiefpunkt $T_1(1 \mid -16)$. [1 P.]
- $f''(2) = -78 < 0$: Hochpunkt $H(2 \mid 0)$. [1 P.]
- $f''(25/6) = 247 > 0$: Tiefpunkt $T_2(25/6 \mid -127,1412)$. [1 P.]

e) Wendepunkte (6 P.)

- $f''(x) = 6(18x^2 - 86x + 87) = 0$. [1 P.]
- $x_{1,2} = (43 \pm \sqrt{283})/18 \approx 1,45430$ bzw. $3,32348$. [2 P.]
- $W_1 \approx (1,45430 \mid -8,54061)$; $W_2 \approx (3,32348 \mid -73,15418)$. [2 P.]
- $f'''(x) = 216x - 516$ ist an beiden Stellen $\neq 0$, also jeweils echter Krümmungswechsel. [1 P.]

f) Skizze (3 P.)

- Nullstellen bei $5/9$, 2 (Berührung) und 5 sowie y-Achsenabschnitt $(0 \mid 100)$. [1 P.]
- Lage und Art der drei Extrempunkte sowie Wendepunkte korrekt eingezeichnet. [1 P.]
- Endverhalten $f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$; sinnvoller Maßstab und beschriftete Achsen. [1 P.]

g) Nicht angenommene Funktionswerte (2 P.)

- Globales Minimum ist der kleinere Tiefpunkt bei $x = 25/6$, mit $f(25/6) \approx -127,1412$. [1 P.]
- Wertebereich: $[f(25/6), +\infty)$; alle Werte kleiner als dieses Minimum werden nicht angenommen. [1 P.]

Aufgabe 2 – Polynom aus Bedingungen (12 Punkte)

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$.

- Durch Ursprung: $d = 0$. [1 P.]
- Hochpunkt bei -2 : $f(-2) = 12a - 4b + c = 0$. [2 P.]
- Wendepunkt bei $-0,5$: $f'(-0,5) = -3a + 2b = 0$. [2 P.]
- Tangentensteigung bei 2 : $f'(2) = 12a + 4b + c = 4$. [2 P.]
- Subtraktion liefert $8b = 4$, also $b = 1/2$; aus $-3a + 2b = 0$ folgt $a = 1/3$. [2 P.]
- Aus $12a - 4b + c = 0$ folgt $c = -2$; damit $f(x) = (1/3)x^3 + (1/2)x^2 - 2x$. [2 P.]
- Kontrolle: $f'(-2) = -3 < 0$ (Hochpunkt), $f''(x) = 2 \neq 0$ (Wendepunkt). [1 P.]

Aufgabe 3 – Rechteckoptimierung (10 Punkte)

Im ersten Quadranten liegt das Rechteck zwischen $x = 0$ und $x = 4$ unter dem Graphen $p(x) = (x - 4)^2$.

a) Skizze (3 P.)

- Koordinatenachsen, Graph p und Achsenschnittpunkte $(0 \mid 16)$, $(4 \mid 0)$. [1 P.]
- Rechteck mit Eckpunkten $(0 \mid 0)$, $(x \mid 0)$, $(x \mid p(x))$, $(0 \mid p(x))$. [1 P.]
- Breite x und Höhe $p(x)$ korrekt bezeichnet, $0 \leq x \leq 4$. [1 P.]

b) Maximale Fläche (7 P.)

- $A(x) = x \cdot p(x) = x(x - 4)^2 = x^3 - 8x^2 + 16x$. [2 P.]
- $A'(x) = 3x^2 - 16x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4/3$ oder $x = 4$. [2 P.]
- $A''(x) = 6x - 16$; $A''(4/3) = -8 < 0$. [1 P.]
- $A(0) = A(4) = 0$; somit liegt das globale Maximum bei $x = 4/3$. [1 P.]
- Höhe $p(4/3) = 64/9$; maximale Fläche $A_{\max} = 256/27 \approx 9,4815$. [1 P.]

Aufgabe 4 – Ableitungsregeln (8 Punkte)

a) $f(x) = x + 5/\sqrt{x^2 + 1}$ (4 P.)

- Schreibe $f(x) = x + 5(x^2 + 1)^{-1/2}$. [1 P.]
- Kettenregel: $d/dx (x^2 + 1)^{-1/2} = -(1/2)(x^2 + 1)^{-3/2} \cdot 2x$. [2 P.]
- $f'(x) = 1 - 5x/(x^2 + 1)^{3/2}$. [1 P.]

b) $g(x) = [\sin(\sqrt{x^2 + 2x + 5})]^2$ (4 P.)

- Setze $u = x^2 + 2x + 5$, $v = \sqrt{u}$ und $g = \sin^2(v)$. [1 P.]
- Äußere Ableitung: $2\sin(v)\cos(v)$ (Kettenregel). [1 P.]

- Innere Ableitung: $v' = (2x + 2)/(2\sqrt{u}) = (x + 1)/\sqrt{u}$. [1 P.]
- $g'(x) = 2\sin(\sqrt{u})\cos(\sqrt{u}) \cdot (x + 1)/\sqrt{u} = [(x + 1)/\sqrt{u}] \cdot \sin(2\sqrt{u})$. [1 P.]

Punkteübersicht

Aufgabe 1: $4 + 5 + 6 + 4 + 6 + 3 + 2 = 30$ P.

Aufgabe 2: 12 P.

Aufgabe 3: $3 + 7 = 10$ P.

Aufgabe 4: $4 + 4 = 8$ P.

Gesamt: 60 Punkte

Hinweis: Die Formulierung „nicht angenommene Funktionswerte“ in 1g wird als Frage nach dem Wertebereich verstanden. Bei 3 wird die eingeschlossene Fläche im Bereich $0 \leq x \leq 4$ betrachtet.