

Mathematik mit Mohajerani

Mathematik verstehen – Schritt für Schritt

ÜBUNGSBUCH DIFFERENTIALRECHNUNG

Extremstellen • Hochpunkte • Tiefpunkte • Wendepunkte

Für die gymnasiale Oberstufe – E-Phase / Q-Phase

Name: _____ Klasse/Kurs: _____

© F. Mohajerani | Schuljahr 2026/27

Inhaltsübersicht

1. Grundidee: Ableitungen und Kurvenverhalten
2. Extremstellen – notwendige und hinreichende Bedingungen
3. Hochpunkte und Tiefpunkte vollständig berechnen
4. Wendestellen und Wendepunkte
5. Sattel- und Terrassenpunkte
6. Gemischte Kurvendiskussion
7. Anwendungs- und Sachaufgaben
8. Training in drei Niveaustufen
9. Klausurtraining
10. Vollständige Lösungen und Erwartungshorizont

Lernziele

Du kannst Extrem- und Wendestellen rechnerisch bestimmen, Hoch- und Tiefpunkte klassifizieren, vollständige Punktkoordinaten angeben und deine Ergebnisse mathematisch begründen.

1. Grundidee: Ableitungen und Kurvenverhalten

Ableitungen beschreiben, wie sich der Graph einer Funktion verändert. Für die Untersuchung besonderer Punkte sind vor allem die ersten drei Ableitungen wichtig.

Ableitung	Bedeutung	Typische Verwendung
$f'(x)$	Steigung des Graphen	Kandidaten für Extremstellen: $f'(x)=0$
$f''(x)$	Änderung der Steigung / Krümmung	Klassifikation von Extremstellen; Wendestellen
$f'''(x)$	Änderung der Krümmung	Prüfung einer Wendestelle

Merksatz

Ein x-Wert ist zunächst nur eine Stelle. Ein Punkt benötigt zusätzlich den Funktionswert: $P(x | f(x))$.

Ableitungsregeln – Kurzüberblick

- Potenzregel: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
- Summenregel: Terme werden einzeln abgeleitet.
- Konstantenregel: Die Ableitung einer Konstanten ist 0.
- Faktorregel: Konstante Faktoren bleiben beim Ableiten erhalten.

Aufgabe 1. Bilde jeweils $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$: a) $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$ b) $f(x)=2x^4-8x^2+3$ c) $f(x)=-0,5x^4+2x^3+6x$.

2. Extremstellen

Definition

Eine Extremstelle ist eine Stelle, an der eine Funktion lokal einen Hoch- oder Tiefpunkt besitzt.

Notwendige Bedingung

Für eine differenzierbare Funktion gilt an einer inneren Extremstelle: $f'(x_E)=0$.

Hinreichende Bedingung mit f''

Gilt $f'(x_E)=0$ und $f''(x_E)<0$, liegt ein Hochpunkt vor. Gilt $f'(x_E)=0$ und $f''(x_E)>0$, liegt ein Tiefpunkt vor. Bei $f''(x_E)=0$ ist weitere Prüfung nötig.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

Gegeben: $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$

1. Ableiten: $f'(x)=3x^2-6x-9$
2. $f'(x)=0$ setzen: $3x^2-6x-9=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0$
3. Kandidaten: $x_1=-1$ und $x_2=3$
4. Zweite Ableitung: $f''(x)=6x-6$
5. $f''(-1)=-12<0 \Rightarrow$ Hochpunkt; $f''(3)=12>0 \Rightarrow$ Tiefpunkt
6. Funktionswerte: $f(-1)=10$ und $f(3)=-22$

Ergebnis: H(-1|10), T(3|-22)

Typischer Fehler

$f'(x)=0$ liefert noch keinen Hoch- oder Tiefpunkt. Die Art des Punktes muss geprüft und die y-Koordinate mit $f(x)$ berechnet werden.

Aufgabe 2. Bestimme alle Extrempunkte von $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$.

Aufgabe 3. Bestimme alle Extrempunkte von $f(x)=x^4-8x^2+7$.

Aufgabe 4. Untersuche $f(x)=-2x^3+6x^2+18x-5$ auf Extrempunkte.

3. Hochpunkte und Tiefpunkte – systematisches Verfahren

1. Definitionsbereich beachten.
2. $f'(x)$ bilden.
3. Gleichung $f'(x)=0$ lösen.
4. Kandidaten mit $f''(x)$ oder Vorzeichenwechsel von f' prüfen.
5. Art bestimmen: Hochpunkt oder Tiefpunkt.
6. y-Koordinate mit $f(x_E)$ berechnen.
7. Ergebnis als Punkt $H(x|y)$ bzw. $T(x|y)$ angeben.

Aufgabe 5. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$. Bestimme die Extrempunkte.

Aufgabe 6. $f(x)=x^4-4x^3$. Bestimme und klassifiziere alle stationären Stellen.

Aufgabe 7. $f(x)=x^4-2x^2$. Untersuche vollständig auf Extrempunkte.

Aufgabe 8. $f(x)=0,25x^4-2x^2+4$. Bestimme Hoch- und Tiefpunkte.

4. Wendestellen und Wendepunkte

Definition

Ein Wendepunkt ist ein Punkt, an dem sich das Krümmungsverhalten des Graphen ändert.

Notwendige Bedingung

Für zweimal differenzierbare Funktionen ist $f''(x_W)=0$ eine notwendige Bedingung für eine Wendestelle.

Praktische hinreichende Prüfung

Gilt $f''(x_W)=0$ und $f'''(x_W) \neq 0$, liegt eine Wendestelle vor. Alternativ kann ein Vorzeichenwechsel von f'' geprüft werden.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

Gegeben: $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$

$$f'(x)=3x^2-12x+9$$

$$f''(x)=6x-12$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 6x-12=0 \Rightarrow x_W=2$$

$$f'''(x)=6 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bestätigt}$$

$$f(2)=8-24+18+1=3$$

Ergebnis: $W(2|3)$

Aufgabe 9. Bestimme den Wendepunkt von $f(x)=x^3-3x^2+2$.

Aufgabe 10. Bestimme alle Wendepunkte von $f(x)=x^4-4x^3+2$.

Aufgabe 11. Untersuche $f(x)=2x^4-8x^2+1$ auf Wendepunkte.

Aufgabe 12. Zeige rechnerisch, ob $f(x)=x^4$ an $x=0$ einen Wendepunkt besitzt.

5. Sattel- und Terrassenpunkte

Merksatz

Ein stationärer Wendepunkt (häufig Sattel- oder Terrassenpunkt genannt) ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente. Es gilt $f'(x_S)=0$ und es liegt zugleich ein Wendepunkt vor.

Beispiel

$f(x)=x^3$. Es gilt $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$ und $f'''(x)=6$. Bei $x=0$ sind $f'(0)=0$ und $f''(0)=0$; wegen $f'''(0)\neq 0$ liegt ein stationärer Wendepunkt $S(0|0)$ vor.

Aufgabe 13. Untersuche $f(x)=x^3-3$ auf einen stationären Wendepunkt.

Aufgabe 14. Untersuche $f(x)=x^4-4x^3$ auf stationäre Wendepunkte.

Aufgabe 15. Erkläre den Unterschied zwischen einem Tiefpunkt und einem stationären Wendepunkt mithilfe der Ableitungen.

6. Gemischte Kurvendiskussion

Arbeitsauftrag

Bestimme jeweils die Extrempunkte und Wendepunkte. Gib alle Bedingungen und vollständigen Punktkoordinaten an.

Aufgabe 16. $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$

Aufgabe 17. $f(x)=x^4-4x^2$

Aufgabe 18. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$

Aufgabe 19. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 4$

Aufgabe 20. $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 2$

Aufgabe 21. $f(x) = 2x^3 - 12x + 1$

7. Anwendungs- und Sachaufgaben

Aufgabe 22. Die Höhe eines Modellflugkörpers wird für einen kurzen Zeitraum durch $h(t) = -t^3 + 6t^2 + 3$ (t in s, h in m) modelliert. Bestimme rechnerisch den Zeitpunkt und die Höhe eines lokalen Maximums. Interpretiere das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Aufgabe 23. Die momentane Kostenentwicklung eines Modellbetriebs wird durch $K(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 20$ beschrieben. Untersuche die Funktion auf Extrem- und Wendepunkte und erlautere mathematisch, was die Wendestelle für den Verlauf bedeutet.

Aufgabe 24. Eine Geländelinie wird durch $f(x)=0,25x^4-2x^2$ beschrieben. Bestimme Hoch-/Tiefpunkte und Wendepunkte. Skizziere anschließend den qualitativen Verlauf.

8. Training in drei Niveaustufen

Niveau I – Grundlagen

Aufgabe 25. Bestimme die Extrempunkte von $f(x)=x^3-3x^2$.

Aufgabe 26. Bestimme die Extrempunkte von $f(x)=x^3-12x$.

Aufgabe 27. Bestimme die Extrempunkte von $f(x)=x^4-2x^2$.

Aufgabe 28. Bestimme die Extrempunkte von $f(x)=2x^3-6x^2+1$.

Niveau II – Standard

Aufgabe 29. Bestimme Extrem- und Wendepunkte von $f(x)=x^3-6x^2+9x+4$.

Aufgabe 30. Bestimme Extrem- und Wendepunkte von $f(x)=x^4-4x^3+2$.

Aufgabe 31. Bestimme Extrem- und Wendepunkte von $f(x)=\frac{1}{2}x^4-4x^2+3$.

Niveau III – anspruchsvoll

Aufgabe 32. Für $f_a(x) = x^3 - 3ax$ gilt $a > 0$. Bestimme die Extremstellen in Abhängigkeit von a und klassifiziere sie.

Aufgabe 33. Eine ganzrationale Funktion dritten Grades besitzt bei $x=1$ einen Hochpunkt und bei $x=3$ einen Tiefpunkt. Was lässt sich über die Nullstellen von f' aussagen? Formuliere eine mögliche Ableitungsfunktion $f'(x)$.

9. Klausurtraining – 25 Minuten

Hilfsmittel: nach Vorgabe der Lehrkraft. Bearbeitungszeit: 25 Minuten. Gesamt: 25 Punkte.

1. Ableitungen (4 P)

Gegeben ist $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$. Bestimme $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$.

2. Extrempunkte (8 P)

Bestimme alle Extrempunkte von f vollständig und klassifiziere sie.

3. Wendepunkt (6 P)

Bestimme den Wendepunkt von f und begründe rechnerisch, dass tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt.

4. Verständnis (3 P)

Erkläre, warum $f'(x)=0$ allein nicht ausreicht, um einen Hoch- oder Tiefpunkt nachzuweisen.

5. Transfer (4 P)

Entscheide für $g(x)=x^4$, ob bei $x=0$ ein Extrempunkt, Wendepunkt oder beides vorliegt. Begründe.