

Band 2 – Funktionen

Teil D: Folien 61–80

Vollständiges Lehrerhandbuch mit Definitionen, Formeln, Beispielen, Aufgaben und Lösungen

© F. Mohajerani | Schuljahr 2026/27

Inhalt

1. Folie 61: Wertemenge
2. Folie 62: Monotonie
3. Folie 63: Maximum
4. Folie 64: Minimum
5. Folie 65: Graph lesen
6. Folie 66: Funktionsfamilien
7. Folie 67: Transformationen
8. Folie 68: Spiegelung
9. Folie 69: Verschiebung
10. Folie 70: Streckung Graph
11. Folie 71: MSA-Aufgabe 1
12. Folie 72: MSA-Aufgabe 2
13. Folie 73: Zusammenfassung
14. Folie 74: Formelübersicht
15. Folie 75: Lernkarte
16. Folie 76: Abschluss
17. Folie 77: Zusatz 1: Stückweise Funktionen
18. Folie 78: Zusatz 2: Betragsfunktion
19. Folie 79: Zusatz 3: Wurzelfunktion
20. Folie 80: Zusatz 4: Modellkritik

Folie 61: Wertemenge

Definition

Die Wertemenge W enthält alle y -Werte, die eine Funktion tatsächlich annimmt.

Wichtige Formel(n)

- $W = \{f(x) \mid x \in D\}$

Merksatz

Die Wertemenge hängt vom Graphen und der Definitionsmenge ab.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

21. $f(x) = x^2$.
22. Quadrate sind nie negativ.
23. Kleinster Wert ist 0.
24. $W = [0; \infty)$.

Aufgabe

Bestimme W für $g(x) = -(x-2)^2 + 5$.

Musterlösung

25. Parabel öffnet nach unten.
26. Maximalwert ist 5.
27. Alle kleineren Werte treten auf.
28. $W = (-\infty; 5]$.

MSA-Tipp

Scheitelpunkt hilft bei Wertemengen quadratischer Funktionen.

Folie 62: Monotonie

Definition

Monotonie beschreibt, ob eine Funktion in einem Bereich steigt, fällt oder konstant bleibt.

Wichtige Formel(n)

- steigend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- fallend: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Merksatz

Monotonie kann sich an Extrempunkten ändern.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

29. $f(x) = (x-1)^2$.

30. Scheitelpunkt bei $x=1$.

31. Für $x \leq 1$ fällt f .

32. Für $x \geq 1$ steigt f .

Aufgabe

Beschreibe die Monotonie von $g(x) = -(x+2)^2 + 4$.

Musterlösung

33. Scheitelpunkt bei $x=-2$.

34. Bis $x=-2$ steigt g .

35. Ab $x=-2$ fällt g .

MSA-Tipp

Monotonie immer mit Intervallen angeben.

Folie 63: Maximum

Definition

Ein Maximum ist der größte Funktionswert in einem betrachteten Bereich. Bei einer nach unten geöffneten Parabel liegt es am Scheitelpunkt.

Wichtige Formel(n)

- $a < 0 \Rightarrow$ Maximum bei $S(h|k)$

Merksatz

Das Maximum ist der y-Wert, die Maximumstelle der zugehörige x-Wert.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

- 36. $f(x) = -2(x-3)^2 + 10$.
- 37. Scheitelpunkt $S(3|10)$.
- 38. Maximumstelle $x=3$.
- 39. Maximalwert 10.

Aufgabe

Bestimme Maximumstelle und Maximalwert von $g(x) = -(x+1)^2 + 7$.

Musterlösung

- 40. $S(-1|7)$.
- 41. Maximumstelle: $x=-1$.
- 42. Maximalwert: 7.

MSA-Tipp

Maximumstelle und Maximum nicht verwechseln.

Folie 64: Minimum

Definition

Ein Minimum ist der kleinste Funktionswert in einem betrachteten Bereich. Bei einer nach oben geöffneten Parabel liegt es am Scheitelpunkt.

Wichtige Formel(n)

- $a > 0 \Rightarrow$ Minimum bei $S(h|k)$

Merksatz

Minimumstelle ist x , Minimalwert ist y .

Schritt-für-Schritt-Beispiel

- 43. $f(x) = 3(x-2)^2 - 4$.
- 44. Scheitelpunkt $S(2|-4)$.
- 45. Minimumstelle $x=2$.
- 46. Minimalwert -4 .

Aufgabe

Bestimme das Minimum von $g(x) = 0,5(x+5)^2 + 1$.

Musterlösung

- 47. Scheitelpunkt $S(-5|1)$.
- 48. Minimumstelle $x=-5$.
- 49. Minimalwert 1 .

MSA-Tipp

Bei eingeschränkten Intervallen auch Randwerte prüfen.

Folie 65: Graph lesen

Definition

Beim Lesen eines Graphen werden Funktionswerte, Nullstellen, Achsenschnittpunkte, Extrempunkte und Verläufe aus der Zeichnung entnommen.

Wichtige Formel(n)

- $f(a)=b \leftrightarrow \text{Punkt } (a|b) \text{ liegt auf dem Graphen}$

Merksatz

Skalierung, Einheiten und Genauigkeit bestimmen die Qualität des Ablesens.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

- 50. Am Graphen liegt $P(2|5)$.
- 51. Daraus folgt $f(2)=5$.
- 52. Schneidet der Graph bei $x=4$ die x -Achse, ist $x=4$ eine Nullstelle.
- 53. Ein Hochpunkt liefert ein lokales Maximum.

Aufgabe

Ein Graph enthält $A(-1|3)$, $N(2|0)$, $H(4|6)$. Formuliere drei Aussagen.

Musterlösung

- 54. $f(-1)=3$.
- 55. $x=2$ ist eine Nullstelle.
- 56. Bei $x=4$ liegt ein Hochpunkt mit Wert 6.

MSA-Tipp

Abgelesene Werte mit „ungefähr“ kennzeichnen, wenn die Grafik keine exakte Angabe erlaubt.

Folie 66: Funktionsfamilien

Definition

Eine Funktionsfamilie enthält Funktionen gleicher Grundform, die sich durch Parameter unterscheiden.

Wichtige Formel(n)

- $f_a(x) = a \cdot x^2$
- $g_b(x) = x + b$

Merksatz

Parameter steuern Eigenschaften des gesamten Graphen.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

57. $f_a(x) = a \cdot x^2$ für $a = -1, 0, 5, 2$.

58. $a < 0$: Öffnung nach unten.

59. $0 < a < 1$: breite Parabel.

60. $a > 1$: schmale Parabel.

Aufgabe

Beschreibe $g_c(x) = (x - c)^2$ für $c = -2, 0, 3$.

Musterlösung

61. $c = -2$: Scheitel bei $(-2|0)$.

62. $c = 0$: Scheitel bei $(0|0)$.

63. $c = 3$: Scheitel bei $(3|0)$.

64. Parameter c verschiebt horizontal.

MSA-Tipp

Bei Parameteraufgaben immer beschreiben, was gleich bleibt und was sich verändert.

Folie 67: Transformationen

Definition

Transformationen verändern einen Grundgraphen durch Verschieben, Spiegeln und Strecken oder Stauchen.

Wichtige Formel(n)

- $g(x)=a \cdot f(x-h)+k$

Merksatz

a verändert vertikal, h horizontal, k vertikal.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

65. Aus $f(x)=x^2$ entsteht $g(x)=-2(x-3)^2+1$.
66. 3 nach rechts.
67. Spiegelung an der x-Achse und Streckung Faktor 2.
68. 1 nach oben.

Aufgabe

Beschreibe die Transformation von $f(x)=x^2$ zu $g(x)=0,5(x+4)^2-2$.

Musterlösung

69. 4 nach links.
70. Stauchung in y-Richtung mit Faktor 0,5.
71. 2 nach unten.
72. Keine Spiegelung.

MSA-Tipp

Transformationen in sinnvoller Reihenfolge nennen: horizontal, vertikal, Spiegelung/Streckung.

Folie 68: Spiegelung

Definition

Multiplikation aller Funktionswerte mit -1 spiegelt den Graphen an der x-Achse. Das Ersetzen von x durch $-x$ spiegelt an der y-Achse.

Wichtige Formel(n)

- x-Achse: $g(x) = -f(x)$
- y-Achse: $g(x) = f(-x)$

Merksatz

Außen minus: Spiegelung oben-unten; innen minus: Spiegelung links-rechts.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

73. $f(x) = x^3 + 1$.

74. $g(x) = -f(x) = -x^3 - 1$: Spiegelung an x-Achse.

75. $h(x) = f(-x) = -x^3 + 1$: Spiegelung an y-Achse.

Aufgabe

Spiegle $f(x) = 2x - 3$ an der x-Achse.

Musterlösung

76. $g(x) = -f(x)$.

77. $g(x) = -(2x - 3)$.

78. $g(x) = -2x + 3$.

MSA-Tipp

Beim Negieren einer ganzen Funktion Klammern setzen.

Folie 69: Verschiebung

Definition

Eine vertikale Verschiebung addiert k zum Funktionswert; eine horizontale Verschiebung ersetzt x durch $x-h$.

Wichtige Formel(n)

- vertikal: $g(x)=f(x)+k$
- horizontal: $g(x)=f(x-h)$

Merksatz

Außen wirkt gleichsinnig, innen gegensinnig.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

79. $f(x)=x^2$.

80. $g(x)=f(x)+4=x^2+4$: 4 nach oben.

81. $h(x)=f(x-3)=(x-3)^2$: 3 nach rechts.

Aufgabe

Verschiebe $f(x)=|x|$ um 2 nach links und 5 nach unten.

Musterlösung

82. 2 nach links: x durch $x+2$ ersetzen.

83. 5 nach unten: -5 addieren.

84. $g(x)=|x+2|-5$.

MSA-Tipp

Scheitel- oder Knickpunkt zur Kontrolle mitverschieben.

Folie 70: Streckung Graph

Definition

Eine vertikale Streckung oder Stauchung multipliziert alle Funktionswerte mit einem Faktor a .

Wichtige Formel(n)

- $g(x) = a \cdot f(x)$

Merksatz

$|a| > 1$ streckt, $0 < |a| < 1$ staucht; $a < 0$ spiegelt zusätzlich.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

85. $f(x) = x^2$, $g(x) = -0,5f(x)$.

86. Faktor 0,5: Stauchung.

87. Minus: Spiegelung an x-Achse.

88. $g(x) = -0,5x^2$.

Aufgabe

Beschreibe $g(x) = 3 \cdot f(x)$ für einen beliebigen Grundgraphen f .

Musterlösung

89. Jeder y-Wert wird verdreifacht.

90. Abstände zur x-Achse werden dreimal so groß.

91. Der Graph wird vertikal gestreckt.

MSA-Tipp

Punkte auf der x-Achse bleiben bei vertikaler Streckung unverändert.

Folie 71: MSA-Aufgabe 1

Definition

Eine typische MSA-Aufgabe kombiniert Funktionsgleichung, Graph, Wertberechnung und Interpretation.

Wichtige Formel(n)

- $f(x)=mx+b$
- $m=\Delta y/\Delta x$

Merksatz

Teilaufgaben sorgfältig lesen und Ergebnisse im Kontext deuten.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

92. Ein Behälter enthält 150 l und wird mit 12 l/min gefüllt.

93. $V(t)=12t+150$.

94. $V(20)=390$ l.

95. Für 510 l: $12t+150=510 \rightarrow t=30$ min.

Aufgabe

Ein Akku startet bei 90 % und verliert stündlich 7 Prozentpunkte. Stelle ein lineares Modell auf und bestimme den Stand nach 8 h sowie den Zeitpunkt 20 %.

Musterlösung

96. $A(t)=-7t+90$.

97. $A(8)=34$ %.

98. $-7t+90=20$.

99. $-7t=-70 \rightarrow t=10$ h.

MSA-Tipp

Prozentpunkte und prozentuale Änderung unterscheiden.

Folie 72: MSA-Aufgabe 2

Definition

Eine zweite MSA-Aufgabe kann quadratische oder exponentielle Modelle mit mehreren Darstellungen verbinden.

Wichtige Formel(n)

- $h(t)=at^2+bt+c$
- $N(t)=N_0q^t$

Merksatz

Ergebnisse aus Rechner und Graph plausibilisieren.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

100. $h(t)=-5t^2+20t+1$.
101. Maximum bei $t=2$ s.
102. $h(2)=21$ m.
103. Nullstelle positiv löst den Auftreffzeitpunkt.

Aufgabe

Für $h(t)=-4t^2+16t+1$ bestimme maximale Höhe und Zeitpunkt.

Musterlösung

104. $t_S=-16/(2 \cdot -4)=2$ s.
105. $h(2)=-16+32+1=17$ m.
106. Maximale Höhe 17 m nach 2 s.

MSA-Tipp

Taschenrechnerergebnisse immer mit mathematischem Ansatz dokumentieren.

Folie 73: Zusammenfassung

Definition

Die Zusammenfassung bündelt zentrale Begriffe und Verfahren zu linearen, quadratischen und exponentiellen Funktionen.

Wichtige Formel(n)

- linear: $mx+b$
- quadratisch: ax^2+bx+c
- exponentiell: $a \cdot q^x$

Merksatz

Funktionstyp erkennen, Parameter deuten, passende Methode wählen.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

107. Ordne: $2x+3$ linear; x^2-4 quadratisch; $5 \cdot 1,1^x$ exponentiell.
108. Lineare Graphen sind Geraden.
109. Quadratische Graphen sind Parabeln.
110. Exponentielle Graphen zeigen multiplikative Änderung.

Aufgabe

Erstelle eine Vergleichstabelle mit Gleichungsform, Graphform und Änderungsart der drei Funktionstypen.

Musterlösung

111. Linear: $mx+b$, Gerade, konstante Differenz.
112. Quadratisch: ax^2+bx+c , Parabel, veränderliche Steigung.
113. Exponentiell: $a \cdot q^x$, Exponentialkurve, konstanter Faktor.

MSA-Tipp

Vor Prüfungen eine persönliche Übersicht mit typischen Erkennungsmerkmalen erstellen.

Folie 74: Formelübersicht

Definition

Eine Formelübersicht sammelt die wichtigsten Gleichungen und ordnet sie den passenden Problemtypen zu.

Wichtige Formel(n)

- $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$
- $f(x) = mx + b$
- $x_S = -b / (2a)$
- $x = (-b \pm \sqrt{\Delta}) / (2a)$
- $N = N_0 q^t$

Merksatz

Formeln nicht nur auswendig lernen, sondern Bedingungen und Bedeutungen kennen.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

114. Gesucht: Steigung aus zwei Punkten → Steigungsformel.
115. Gesucht: Nullstellen einer quadratischen Gleichung → pq- oder Mitternachtsformel.
116. Gesucht: Bestand nach mehreren Perioden → Exponentialformel.

Aufgabe

Wähle die passende Formel: a) Gerade durch zwei Punkte, b) Scheitelpunkt, c) Wachstum um 6 %.

Musterlösung

117. a) $m = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$, dann $b = y - mx$.
118. b) $x_S = -b / (2a)$, $y_S = f(x_S)$.
119. c) $N(t) = N_0 \cdot 1,06^t$.

MSA-Tipp

Formelwahl kurz begründen; das verhindert typische Methodenfehler.

Folie 75: Lernkarte

Definition

Eine Lernkarte fasst auf kleinem Raum Definition, Formel, Beispiel und Fehlerhinweis eines Themas zusammen.

Wichtige Formel(n)

- Vorderseite: Begriff/Frage
- Rückseite: Definition, Formel, Mini-Beispiel

Merksatz

Aktives Abrufen ist wirksamer als bloßes Lesen.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

120. Vorderseite: Wie berechnet man die Steigung?
121. Rückseite: $m = \Delta y / \Delta x$.
122. Beispiel A(1|2), B(4|8): $m = 6/3 = 2$.
123. Fehlerhinweis: Punktreihenfolge beibehalten.

Aufgabe

Erstelle eine Lernkarte zur Scheitelpunktform.

Musterlösung

124. Vorderseite: Was zeigt $f(x) = a(x-h)^2 + k$?
125. Rückseite: S(h|k), Öffnung durch Vorzeichen von a, Breite durch |a|.
126. Beispiel: $-2(x-3)^2 + 1 \rightarrow S(3|1)$, nach unten, gestreckt.

MSA-Tipp

Lernkarten regelmäßig mischen und laut beantworten.

Folie 76: Abschluss

Definition

Die Abschlussfolie dient der Selbstkontrolle: Lernende reflektieren, welche Funktionstypen und Verfahren sie sicher beherrschen.

Wichtige Formel(n)

- **Selbstcheck: erkennen – berechnen – darstellen – interpretieren**

Merksatz

Erklären können ist ein Zeichen für echtes Verständnis.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

127. Frage: Woran erkennst du lineares Wachstum?
128. Antwort: konstante Differenzen und gerader Graph.
129. Frage: Woran erkennst du exponentielles Wachstum?
130. Antwort: konstanter Faktor bzw. konstante prozentuale Änderung.

Aufgabe

Formuliere drei Kompetenzen, die du nach Band 2 beherrschst, und nenne je ein Beispiel.

Musterlösung

131. Beispiel 1: Ich bestimme lineare Gleichungen aus Punkten.
132. Beispiel 2: Ich berechne Scheitelpunkte und Nullstellen.
133. Beispiel 3: Ich unterscheide lineare und exponentielle Modelle.

MSA-Tipp

Vor dem MSA Unsicherheiten gezielt mit passenden Aufgaben üben.

Folie 77: Zusatz 1: Stückweise Funktionen

Definition

Eine stückweise definierte Funktion verwendet in verschiedenen Bereichen der Definitionsmenge unterschiedliche Funktionsterme.

Wichtige Formel(n)

- $f(x) = \{f_1(x) \text{ für } x < a; f_2(x) \text{ für } x \geq a\}$

Merksatz

Für jeden x-Wert gilt genau die zum Bereich passende Vorschrift.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

134. $f(x) = x + 2$ für $x < 0$, $f(x) = x^2$ für $x \geq 0$.
135. $f(-3) = -1$, weil $-3 < 0$.
136. $f(2) = 4$, weil $2 \geq 0$.
137. An der Grenze $x = 0$ gilt der zweite Term: $f(0) = 0$.

Aufgabe

Gegeben $g(x) = 2x$ für $x \leq 1$ und $g(x) = x + 3$ für $x > 1$. Berechne $g(-2)$, $g(1)$, $g(4)$.

Musterlösung

138. $g(-2) = -4$.
139. $g(1) = 2$.
140. $g(4) = 7$.

MSA-Tipp

Grenzzeichen $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ genau beachten.

Folie 78: Zusatz 2: Betragsfunktion

Definition

Die Betragsfunktion $f(x)=|x|$ gibt den Abstand von x zur 0 an. Ihr Graph ist V-förmig.

Wichtige Formel(n)

- $|x|=x$ für $x \geq 0$; $|x|=-x$ für $x < 0$

Merksatz

Beträge sind nie negativ.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

- 141. $f(x)=|x-2|+1$.
- 142. Knickpunkt bei $(2|1)$.
- 143. $f(0)=|-2|+1=3$.
- 144. $f(5)=3+1=4$.

Aufgabe

Löse $|x-3|=5$.

Musterlösung

- 145. $x-3=5$ oder $x-3=-5$.
- 146. $x=8$ oder $x=-2$.
- 147. Probe: beide Abstände zu 3 sind 5.

MSA-Tipp

Bei Betragsgleichungen meist zwei Fälle bilden.

Folie 79: Zusatz 3: Wurfelfunktion

Definition

Die Wurzelfunktion $f(x)=\sqrt{x}$ ist die Umkehrung der Quadratfunktion auf $x\geq 0$. Ihr Graph beginnt im Ursprung.

Wichtige Formel(n)

- $f(x)=\sqrt{x}$
- $D=[0;\infty), W=[0;\infty)$

Merksatz

Unter einer reellen Quadratwurzel darf kein negativer Wert stehen.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

148. $f(x)=\sqrt{x-1}+2$.
149. Definitionsbedingung $x-1\geq 0 \rightarrow x\geq 1$.
150. Startpunkt bei $x=1$: $f(1)=2$.
151. Graph ist 1 nach rechts und 2 nach oben verschoben.

Aufgabe

Bestimme D und Startpunkt von $g(x)=\sqrt{x+4}-3$.

Musterlösung

152. $x+4\geq 0 \rightarrow x\geq -4$.
153. $D=[-4;\infty)$.
154. Startpunkt bei $x=-4$: $g(-4)=-3$.
155. Startpunkt $(-4|-3)$.

MSA-Tipp

Definitionsmenge vor weiteren Berechnungen bestimmen.

Folie 80: Zusatz 4: Modellkritik

Definition

Modellkritik prüft, ob Annahmen, Gültigkeitsbereich und Ergebnisse eines mathematischen Modells zur Realität passen.

Wichtige Formel(n)

- **Modell $\neq$ Wirklichkeit**
- **Gültigkeitsbereich beachten**

Merksatz

Ein gutes Ergebnis kann mathematisch korrekt, aber sachlich unsinnig sein.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

156. Ein lineares Bevölkerungsmodell sagt nach 500 Jahren negative Einwohnerzahl voraus.
157. Rechnung kann formal korrekt sein.
158. Das Modell ist außerhalb des beobachteten Zeitraums ungeeignet.
159. Grund: Wachstumsrate bleibt real nicht konstant.

Aufgabe

Ein Tankmodell $V(t) = -30t + 600$ wird für $t=30$ ausgewertet. Beurteile das Ergebnis.

Musterlösung

160. $V(30) = -300$ l.
161. Negative Flüssigkeitsmenge ist unmöglich.
162. Das Modell gilt nur bis zur Nullstelle: $-30t + 600 = 0 \rightarrow t = 20$ min.
163. Für $t > 20$ ist es nicht anwendbar.

MSA-Tipp

In MSA-Aufgaben Modellgrenzen mit einem konkreten Sachargument erklären.

