

Band 2 – Funktionen

Teil C: Folien 41–60

Vollständiges Lehrerhandbuch mit Definitionen, Formeln, Beispielen, Aufgaben und Lösungen

© F. Mohajerani | Schuljahr 2026/27

Inhalt

1. Folie 41: Verschiebung
2. Folie 42: Scheitelpunkt
3. Folie 43: Symmetrieachse
4. Folie 44: Scheitelpunktform
5. Folie 45: Normalform
6. Folie 46: Nullstellen
7. Folie 47: Mitternachtsformel
8. Folie 48: pq-Formel
9. Folie 49: Diskriminante
10. Folie 50: Graphen vergleichen
11. Folie 51: Anwendungen
12. Folie 52: Wurfparabel
13. Folie 53: Optimierungsbeispiel
14. Folie 54: Übung Quadrat
15. Folie 55: Exponentielle Entwicklung
16. Folie 56: Wachstum
17. Folie 57: Zerfall
18. Folie 58: Vergleich linear/exponentiell
19. Folie 59: Funktionstypen
20. Folie 60: Definitionsmenge

Folie 41: Verschiebung

Definition

Eine vertikale Verschiebung addiert k zum Funktionswert; eine horizontale Verschiebung ersetzt x durch $x-h$.

Wichtige Formel(n)

- vertikal: $g(x)=f(x)+k$
- horizontal: $g(x)=f(x-h)$

Merksatz

Außen wirkt gleichsinnig, innen gegensinnig.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

21. $f(x)=x^2$.
22. $g(x)=f(x)+4=x^2+4$: 4 nach oben.
23. $h(x)=f(x-3)=(x-3)^2$: 3 nach rechts.

Aufgabe

Verschiebe $f(x)=|x|$ um 2 nach links und 5 nach unten.

Musterlösung

24. 2 nach links: x durch $x+2$ ersetzen.
25. 5 nach unten: -5 addieren.
26. $g(x)=|x+2|-5$.

MSA-Tipp

Scheitel- oder Knickpunkt zur Kontrolle mitverschieben.

Folie 42: Scheitelpunkt

Definition

Der Scheitelpunkt ist der tiefste Punkt einer nach oben geöffneten oder der höchste Punkt einer nach unten geöffneten Parabel.

Wichtige Formel(n)

- $S(h|k)$ bei $f(x)=a(x-h)^2+k$
- $x_S=-b/(2a)$

Merksatz

Der Scheitelpunkt liegt auf der Symmetrieachse.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

27. $f(x)=x^2-6x+5.$

28. $x_S=-(-6)/(2 \cdot 1)=3.$

29. $y_S=f(3)=9-18+5=-4.$

30. $S(3|-4).$

Aufgabe

Bestimme den Scheitelpunkt von $g(x)=2x^2+8x+3.$

Musterlösung

31. $x_S=-8/(2 \cdot 2)=-2.$

32. $g(-2)=2 \cdot 4-16+3=-5.$

33. $S(-2|-5).$

MSA-Tipp

Nach x_S immer den y-Wert durch Einsetzen berechnen.

Folie 43: Symmetrieachse

Definition

Die Symmetrieachse einer Parabel ist die vertikale Gerade durch den Scheitelpunkt.

Wichtige Formel(n)

- $x=h$
- $x=-b/(2a)$

Merksatz

Punkte mit gleichem Abstand zur Achse haben denselben y-Wert.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

34. $f(x)=x^2-4x+1$.
35. $x=-(-4)/(2 \cdot 1)=2$.
36. Symmetrieachse: $x=2$.
37. $f(1)=f(3)=-2$.

Aufgabe

Bestimme die Symmetrieachse von $g(x)=-2x^2-12x+7$.

Musterlösung

38. $x=-(-12)/(2 \cdot (-2))$.
39. $x=12/-4=-3$.
40. Symmetrieachse: $x=-3$.

MSA-Tipp

Die Symmetrieachse ist eine Gerade $x=...$, kein Punkt.

Folie 44: Scheitelpunktform

Definition

Die Scheitelpunktform $f(x)=a(x-h)^2+k$ zeigt den Scheitelpunkt $S(h|k)$, die Öffnung und die Streckung direkt.

Wichtige Formel(n)

- $f(x)=a(x-h)^2+k$

Merksatz

Aus der Scheitelpunktform lassen sich die wichtigsten Graphmerkmale direkt ablesen.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

41. $f(x)=-2(x-1)^2+5$.
42. $a=-2$: nach unten, gestreckt.
43. $h=1$, $k=5$.
44. Scheitelpunkt $S(1|5)$.

Aufgabe

Analysiere $g(x)=0,5(x+3)^2-4$.

Musterlösung

45. $a=0,5$: nach oben, gestaucht.
46. $h=-3$, $k=-4$.
47. Scheitelpunkt $S(-3|-4)$.

MSA-Tipp

Bei $x+3$ ist $h=-3$.

Folie 45: Normalform

Definition

Die Normalform einer quadratischen Funktion lautet $f(x)=ax^2+bx+c$. Sie eignet sich besonders zum Ablesen von a und c sowie für die allgemeine Lösungsformel.

Wichtige Formel(n)

- $f(x)=ax^2+bx+c$

Merksatz

c ist der y-Achsenabschnitt.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

48. $f(x)=2(x-1)^2-3$.

49. Binom ausmultiplizieren: $2(x^2-2x+1)-3$.

50. $=2x^2-4x+2-3$.

51. Normalform: $2x^2-4x-1$.

Aufgabe

Bringe $g(x)=-(x+2)^2+5$ in Normalform.

Musterlösung

52. $(x+2)^2=x^2+4x+4$.

53. Negieren: $-x^2-4x-4$.

54. $+5$ ergibt $-x^2-4x+1$.

MSA-Tipp

Klammern und Vorzeichen sorgfältig behandeln.

Folie 46: Nullstellen

Definition

Nullstellen quadratischer Funktionen sind die x-Werte, an denen die Parabel die x-Achse schneidet oder berührt.

Wichtige Formel(n)

- $f(x)=0$

Merksatz

Eine quadratische Funktion kann null, eine oder zwei reelle Nullstellen haben.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

55. $f(x)=x^2-5x+6$.

56. Faktorisieren: $(x-2)(x-3)=0$.

57. $x-2=0$ oder $x-3=0$.

58. $x_1=2$, $x_2=3$.

Aufgabe

Bestimme die Nullstellen von $g(x)=x^2-9$.

Musterlösung

59. $x^2-9=(x-3)(x+3)$.

60. $x-3=0$ oder $x+3=0$.

61. $x_1=3$, $x_2=-3$.

MSA-Tipp

Bei Nullstellen den Funktionsterm gleich null setzen.

Folie 47: Mitternachtsformel

Definition

Die Mitternachtsformel löst jede quadratische Gleichung $ax^2+bx+c=0$ mit $a \neq 0$.

Wichtige Formel(n)

- $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) / (2a)$

Merksatz

Vor dem Einsetzen a, b und c einschließlich Vorzeichen notieren.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

62. $2x^2 - 3x - 2 = 0$: $a=2, b=-3, c=-2$.

63. $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25$.

64. $x = (3 \pm 5) / 4$.

65. $x_1 = 2, x_2 = -0,5$.

Aufgabe

Löse $3x^2 + x - 2 = 0$.

Musterlösung

66. $a=3, b=1, c=-2$.

67. $\Delta = 1 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25$.

68. $x = (-1 \pm 5) / 6$.

69. $x_1 = 2/3, x_2 = -1$.

MSA-Tipp

Die gesamte Zählerkonstruktion in Klammern behandeln.

Folie 48: pq-Formel

Definition

Die pq-Formel löst normierte quadratische Gleichungen $x^2+px+q=0$.

Wichtige Formel(n)

- $x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$

Merksatz

Ist der Koeffizient vor x^2 nicht 1, zuerst durch a teilen.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

70. $x^2 - 6x + 5 = 0$: $p = -6, q = 5$.

71. $-p/2 = 3$.

72. $\sqrt{(9-5)} = 2$.

73. $x_1 = 5, x_2 = 1$.

Aufgabe

Löse $x^2 + 4x - 12 = 0$ mit der pq-Formel.

Musterlösung

74. $p = 4, q = -12$.

75. $-p/2 = -2$.

76. $\sqrt{(4+12)} = 4$.

77. $x_1 = 2, x_2 = -6$.

MSA-Tipp

Vorzeichen von p und q besonders sorgfältig übernehmen.

Folie 49: Diskriminante

Definition

Die Diskriminante entscheidet über die Anzahl reeller Lösungen einer quadratischen Gleichung.

Wichtige Formel(n)

- $\Delta = b^2 - 4ac$
- $\Delta > 0$: zwei; $\Delta = 0$: eine doppelte; $\Delta < 0$: keine reelle Lösung

Merksatz

Die Diskriminante beschreibt, wie die Parabel die x-Achse trifft.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

78. $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

79. $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$.

80. Eine doppelte Nullstelle.

81. $x = 2$.

Aufgabe

Bestimme die Anzahl reeller Nullstellen von $g(x) = 2x^2 + 3x + 5$.

Musterlösung

82. $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5$.

83. $\Delta = 9 - 40 = -31$.

84. $\Delta < 0$: keine reellen Nullstellen.

MSA-Tipp

Wenn nur die Anzahl gefragt ist, reicht die Diskriminante; die Lösungen müssen nicht berechnet werden.

Folie 50: Graphen vergleichen

Definition

Quadratische Graphen werden nach Öffnung, Breite, Scheitelpunkt, Symmetrieachse, Achsenschnittpunkten und Nullstellen verglichen.

Wichtige Formel(n)

- $f(x)=a(x-h)^2+k$

Merksatz

Vergleiche Parameter systematisch statt nur nach Augenmaß.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

85. $f(x)=x^2$, $g(x)=-2(x-1)^2+3$.

86. g öffnet nach unten, f nach oben.

87. g ist schmaler und um 1 rechts, 3 hoch verschoben.

88. Scheitelpunkte: (0|0), (1|3).

Aufgabe

Vergleiche $f(x)=0,5x^2$ und $g(x)=0,5(x+2)^2-1$.

Musterlösung

89. Beide öffnen nach oben und sind gleich breit.

90. g ist 2 nach links und 1 nach unten verschoben.

91. Scheitelpunkte: (0|0) und (-2|-1).

MSA-Tipp

Vergleich in vollständigen mathematischen Kriterien formulieren.

Folie 51: Anwendungen

Definition

Quadratische Funktionen modellieren Vorgänge mit gekrümmtem Verlauf, etwa Flugbahnen, Flächenprobleme oder Bremswege.

Wichtige Formel(n)

- $f(x)=ax^2+bx+c$

Merksatz

Quadratische Modelle besitzen oft ein Maximum oder Minimum.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

92. Höhe $h(t)=-5t^2+20t+1$.

93. Scheitelzeit $t=-20/(2 \cdot -5)=2$ s.

94. $h(2)=-20+40+1=21$ m.

95. Maximale Höhe: 21 m.

Aufgabe

Die Höhe eines Balls ist $h(t)=-4t^2+16t+2$. Bestimme die maximale Höhe.

Musterlösung

96. $t_S=-16/(2 \cdot -4)=2$.

97. $h(2)=-16+32+2=18$.

98. Maximale Höhe: 18 m.

MSA-Tipp

Im Sachkontext nur sinnvolle Zeiten $t \geq 0$ betrachten.

Folie 52: Wurfparabel

Definition

Eine idealisierte Wurfbewegung kann durch eine nach unten geöffnete Parabel beschrieben werden.

Wichtige Formel(n)

- $h(t)=at^2+bt+c, a<0$

Merksatz

Der Scheitelpunkt gibt Zeitpunkt und Wert der maximalen Höhe an.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

99. $h(t)=-5t^2+15t+2$.

100. $t_S=-15/(-10)=1,5$ s.

101. $h(1,5)=-11,25+22,5+2=13,25$ m.

102. Maximalhöhe: 13,25 m.

Aufgabe

Bestimme die maximale Höhe von $h(t)=-4t^2+24t+1$.

Musterlösung

103. $t_S=-24/(2 \cdot -4)=3$.

104. $h(3)=-36+72+1=37$.

105. Maximale Höhe: 37 m.

MSA-Tipp

Die zweite Nullstelle kann den Zeitpunkt des Auftreffens darstellen.

Folie 53: Optimierungsbeispiel

Definition

Optimierung bedeutet, ein Maximum oder Minimum einer geeigneten Funktion im Sachkontext zu bestimmen.

Wichtige Formel(n)

- Maximum/Minimum am Scheitelpunkt

Merksatz

Zielfunktion aufstellen, Scheitelpunkt bestimmen, Ergebnis deuten.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

106. Rechteckumfang 20 m: $y=10-x$.

107. Fläche $A(x)=x(10-x)=-x^2+10x$.

108. $x_S=5$.

109. $y=5$; maximale Fläche 25 m^2 .

Aufgabe

Ein Rechteck hat Umfang 28 m. Bestimme die Seitenlängen mit maximaler Fläche.

Musterlösung

110. $y=14-x$.

111. $A(x)=x(14-x)=-x^2+14x$.

112. $x_S=7$.

113. $y=7$; maximale Fläche 49 m^2 .

MSA-Tipp

Das Ergebnis stets auf die ursprünglichen Größen zurückübersetzen.

Folie 54: Übung Quadrat

Definition

Diese Übungsfolie verbindet Parameteranalyse, Scheitelpunkt, Nullstellen und Anwendungsdeutung quadratischer Funktionen.

Wichtige Formel(n)

- $f(x)=ax^2+bx+c$
- $x_S=-b/(2a)$
- $\Delta=b^2-4ac$

Merksatz

Arbeite nach einem festen Analyse-Schema.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

- 114. $f(x)=x^2-2x-3$.
- 115. Scheitel: $x=1, f(1)=-4 \rightarrow S(1|-4)$.
- 116. Nullstellen: $(x-3)(x+1)=0$.
- 117. $x=3$ und $x=-1$.

Aufgabe

Untersuche $g(x)=-x^2+4x+5$ vollständig.

Musterlösung

- 118. Öffnung nach unten.
- 119. S: $x=2, g(2)=9 \rightarrow S(2|9)$.
- 120. Nullstellen: $-x^2+4x+5=0 \rightarrow x^2-4x-5=0$.
- 121. $(x-5)(x+1)=0 \rightarrow x=5, -1$.

MSA-Tipp

Bei vollständiger Analyse eine feste Reihenfolge verwenden.

Folie 55: Exponentielle Entwicklung

Definition

Bei exponentieller Entwicklung wird eine Größe in gleichen Zeitabständen mit demselben Faktor multipliziert.

Wichtige Formel(n)

- $f(t) = a \cdot q^t$

Merksatz

Konstanter Faktor statt konstanter Differenz.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

- 122. Anfangswert 200, jährlicher Faktor 1,05.
- 123. $f(t) = 200 \cdot 1,05^t$.
- 124. Nach 3 Jahren: $f(3) = 200 \cdot 1,157625$.
- 125. $f(3) = 231,53$.

Aufgabe

Ein Bestand von 800 wächst jährlich um 4 %. Berechne nach 5 Jahren.

Musterlösung

- 126. $q = 1,04$.
- 127. $f(t) = 800 \cdot 1,04^t$.
- 128. $f(5) \approx 800 \cdot 1,21665$.
- 129. $\approx 973,32$.

MSA-Tipp

Prozentänderung p in Faktor q umwandeln: Wachstum $q = 1 + p/100$.

Folie 56: Wachstum

Definition

Exponentielles Wachstum liegt bei $q > 1$ vor. Der relative Zuwachs bleibt konstant.

Wichtige Formel(n)

- $N(t) = N_0 \cdot q^t$
- $q = 1 + p/100$

Merksatz

Gleiche Prozentrage bedeutet exponentielles, nicht lineares Wachstum.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

- 130. $N_0 = 500$, $p = 8\%$.
- 131. $q = 1,08$.
- 132. $N(4) = 500 \cdot 1,08^4$.
- 133. $N(4) \approx 680,24$.

Aufgabe

Eine Population von 1200 wächst jährlich um 2,5 %. Bestimme den Bestand nach 6 Jahren.

Musterlösung

- 134. $q = 1,025$.
- 135. $N(6) = 1200 \cdot 1,025^6$.
- 136. $N(6) \approx 1391,63$.
- 137. Gerundet etwa 1392.

MSA-Tipp

Ergebnis sinnvoll runden, bei Personen auf ganze Zahlen.

Folie 57: Zerfall

Definition

Exponentieller Zerfall liegt bei $0 < q < 1$ vor. Die Größe wird regelmäßig um denselben Prozentsatz kleiner.

Wichtige Formel(n)

- $N(t) = N_0 \cdot q^t$
- $q = 1 - p/100$

Merksatz

Bei Zerfall bleibt stets derselbe Anteil übrig.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

138. $N_0 = 1000$, jährlicher Verlust 12 %.

139. $q = 0,88$.

140. $N(3) = 1000 \cdot 0,88^3$.

141. $N(3) \approx 681,472$.

Aufgabe

Ein Wert von 5000 € verliert jährlich 18 %. Bestimme den Wert nach 4 Jahren.

Musterlösung

142. $q = 0,82$.

143. $V(4) = 5000 \cdot 0,82^4$.

144. $V(4) \approx 2260,61$ €.

MSA-Tipp

Verlustfaktor nicht mit 0,18 verwechseln; übrig bleibt 0,82.

Folie 58: Vergleich linear/exponentiell

Definition

Lineare Entwicklung hat eine konstante absolute Änderung; exponentielle Entwicklung eine konstante relative Änderung.

Wichtige Formel(n)

- linear: $f(t)=mt+b$
- exponentiell: $g(t)=a \cdot q^t$

Merksatz

Differenz konstant $\rightarrow$ linear; Quotient konstant $\rightarrow$ exponentiell.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

- 145. Folge A: 100,120,140,160: Differenz +20.
- 146. Modell linear.
- 147. Folge B: 100,120,144,172,8: Faktor 1,2.
- 148. Modell exponentiell.

Aufgabe

Bestimme den Typ: 50,45,40,35 und 50,45,40,5,36,45.

Musterlösung

- 149. Erste Folge: Differenz $-5 \rightarrow$ linear.
- 150. Zweite Folge: Quotient 0,9 $\rightarrow$ exponentieller Zerfall.

MSA-Tipp

Bei Tabellen sowohl Differenzen als auch Quotienten prüfen.

Folie 59: Funktionstypen

Definition

Funktionstypen unterscheiden sich durch ihre Gleichungsform, Graphenform und Änderungsstruktur.

Wichtige Formel(n)

- proportional $y=kx$
- linear $y=mx+b$
- quadratisch $y=ax^2+bx+c$
- exponentiell $y=a \cdot q^x$

Merksatz

Graph, Gleichung und Tabelle gemeinsam betrachten.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

- 151. $f(x)=3x+2$: linear.
- 152. $g(x)=2x^2-1$: quadratisch.
- 153. $h(x)=5 \cdot 1,2^x$: exponentiell.
- 154. $p(x)=4x$: proportional.

Aufgabe

Ordne zu: $a(x)=7/x$, $b(x)=-2x+5$, $c(x)=0,5x^2$, $d(x)=3 \cdot 0,8^x$.

Musterlösung

- 155. a antiproportional.
- 156. b linear.
- 157. c quadratisch.
- 158. d exponentieller Zerfall.

MSA-Tipp

Begründung immer mit einem Merkmal des Funktionstyps geben.

Folie 60: Definitionsmenge

Definition

Die Definitionsmenge D enthält alle x -Werte, für die eine Funktion definiert oder im Sachkontext sinnvoll ist.

Wichtige Formel(n)

- $D = \{x \mid \text{Bedingung}\}$

Merksatz

Nenner dürfen nicht null sein; Wurzeln geraden Grades brauchen nichtnegative Radikanden.

Schritt-für-Schritt-Beispiel

159. $f(x) = 1/(x-3)$.
160. Nenner $x-3$ darf nicht 0 sein.
161. $x \neq 3$.
162. $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Aufgabe

Bestimme D für $g(x) = \sqrt{x+2}$.

Musterlösung

163. Radikand muss ≥ 0 sein.
164. $x+2 \geq 0$.
165. $x \geq -2$.
166. $D = [-2; \infty)$.

MSA-Tipp

Im Sachkontext kann D stärker eingeschränkt sein, etwa $t \geq 0$.

